Lehrbuch

der

darstellenden Geometrie

für

polytechnische Schulen.

Lehrbuch

der

darstellenden Geometrie

für

polytechnische Schulen

von

Friedr. Aug. Klingenfeld,
k. Professor der darstellenden Geometrie und des Maschinenzeichnens an der k. polytechnischen Schule und Lehrer der darstellenden Geometrie und der Mechanik an der k. Gewerbsschule zu Nürnberg.

Mit sieben Kupfertafeln.

Nürnberg,
Bauer und Raspe.
(Julius Merz.)
1854.

Druck von Fr. Campe & Sohn.

Vorrede.

Die Herausgabe des vorliegenden Buches findet ihre Rechtfertigung hauptsächlich in dem Erscheinen meines Lehrbuches der darstellenden Geometrie für Gewerbsschulen (Nürnberg bei J. L. Schrag 1851), in welchem ich es versuchte, vielen Mängeln, an denen mir die darstellende Geometrie zu leiden schien, abzuhelfen. Während man nemlich in dieser Wissenschaft gewohnt war, eine Ebene erst dann als graphisch bestimmt anzusehen, wenn ihre Spuren gezeichnet sind; während man die Projektionsebenen (Tafeln) immer nur so umklappen lehrte, daß man sie um ihren Schnitt (Achse, Basis, Grundschnitt, von mir Kante genannt) drehte, bis sie in eine Ebene zu liegen kamen; während endlich der Schüler daran gewöhnt wurde, diese Kante (Achse) stets in der Zeichnung anzugeben, hat man dieselben Dinge in der Anwendung immer anders behandelt. Man zeichnet da von einer Ebene blos so viele Punkte oder Linien, als zu ihrer Bestimmung nothwendig sind; man ist sehr oft gezwungen, die Tafeln anders umzuklappen als um ihre Kante, ja sogar häufig so, daß sie in verschiedenen Ebenen liegen (wenn z. B. zwei auf verschiedenen Reißbrettern aufgespannte Papier-

bögen die beiden Tafeln vorstellen); man ist endlich gewohnt, die Kante der Tafeln gar nicht zu zeichnen.

Ich habe daher in jenem Lehrbuche (in welchem übrigens blos solche Aufgaben behandelt sind, in den nur gerade Linien und ebene Flächen vorkommen) festgesetzt, daß eine Ebene schon durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, oder durch eine Gerade und einen außer ihr liegenden Punkt, oder durch zwei Gerade bestimmt ist, und die Lösung fast aller Aufgaben so durchgeführt, daß die Spuren der Ebene nicht gesucht werden (nur, wenn eine Senkrechte zu einer Ebene errichtet werden soll, bedarf es der Aufsuchung der Spuren). Ferner habe ich gezeigt, wie man die Risse (Projektion) von Punkten findet, auch wenn die Tafeln irgend wie umgeklappt werden, und wie man berechtigt ist, die Kante (Achse, Grundschnitt) in der Zeichnung wegzulassen. Außerdem habe ich es für zweckdienlich gehalten, die Tafeln, statt durch die Eigenschaftswörter „horizontal, vertikal" (die doch von vorne herein nicht im wahren Sinne des Wortes genommen werden sollen) dadurch zu unterscheiden, daß man die eine „erste Tafel" (T_1), die andere „zweite Tafel" (T_2) nennt; diese Bezeichnungsart paßte mir um so besser, als ich in jenem Buche die Aufgabe: „aus den Rissen (Projektionen) von Punkten auf der ersten und zweiten Tafel, die auf einer dritten und vierten zu finden" — eine Aufgabe, die für die Anwendung der darstellenden Geometrie von so großer Wichtigkeit ist — ganz allgemein durchzuführen suchte. Durch diese Abweichungen meines Lehrgan-

ges von dem bisher gebräuchlichen war ich aber auch gezwungen, Vieles in der bisher üblichen Bezeichnungsweise abzuändern, und für Manches einen Namen zu schaffen, das bisher keines solchen bedurfte.

Dadurch ist es mir aber unmöglich geworden, meinen Schülern an der hiesigen polytechnischen Schule als Leitfaden für meinen Unterricht in der darstellenden Geometrie eines der vorhandenen Werke an die Hand zu geben, indem sie die von der meinigen verschiedene Bezeichnungs- und Behandlungsweise irre geleitet hätte, und so war mir durch meinen eigenen Unterricht die Herausgabe dieses Buches geboten.

Wenn ich damit dennoch so lange gezaudert, so geschah dies deshalb, weil ich erst den Erfolg meines ersten Buches eine geraumere Zeit abwarten wollte. Nachdem aber alle Urtheile von Sachverständigen, die mir darüber zu Ohren kamen, nur günstig lauteten; nachdem jenes Lehrbuch an vielen Gewerbsschulen des Königreichs Bayern (z. B. in Ansbach, Fürth, Passau, Schweinfurth, Würzburg) eingeführt wurde; nachdem endlich dasselbe den Beifall der beiden die darstellende Geometrie lehrenden Herren Professoren an den polytechnischen Schulen München und Augsburg sich so sehr erworben hatte, daß diese mir die Zusage machten, das vorliegende Buch gleich nach seinem Erscheinen ihren Schülern als Leitfaden für ihren Unterricht anempfehlen zu wollen, habe ich es gewagt, dasselbe der Oeffentlichkeit zu übergeben. Daß dieses Buch nicht blos in der Bezeichnungsweise von den anderen abweicht, daß

vielmehr auch der Lehrstoff darin anders als bisher angeordnet ist, wird Jeder, der nur das Inhaltsverzeichniß durchliest, erkennen. Ob ich mich nicht täusche, wenn ich diese Anordnung für übersichtlicher und daher vortheilhafter halte, als die bisherige, und wenn ich mir einbilde, daß viele Abtheilungen mit größerer Gründlichkeit und mit mehr Allgemeinheit behandelt sind, als in den bisher erschienenen Lehrbüchern, muß ich nach dem Erscheinen dieses Buches von dem Urtheile der Sachverständigen erwarten.

Auch in diesem Buche habe ich es gewagt, manche neue Benennungen vorzuschlagen, theils für Dinge, die schon bisher mit Namen belegt waren, über die man aber noch nicht allgemein überein gekommen ist, theils für solche, die bis jetzt mit keinem besonderen Namen versehen waren. Fast alle diese Namen sind theils an den betreffenden Orten begründet, theils rechtfertigen sie sich von selbst. Nur eine Benennung bedarf noch einer Begründung, nemlich der Name „Grath". Man ist über den Namen eines Punktes einer Curve, dessen Nachbarpunkte auf einer Seite seiner Normale liegen, noch nicht übereingekommen. Einige nennen ihn Rückkehrpunkt, Andere Wendepunkt, und es ist sogar der Fall, daß die, welche dafür den Namen Rückkehrpunkt gebrauchen, unter Wendepunkt einen Inflexionspunkt (Flachpunkt s. 28.) verstehen. Es hat mir daher wünschenswerth geschienen, um hier Verwechselungen zu begegnen, einen neuen Namen zu wählen. Ich habe nun aus folgendem Grunde den Namen „Grath" vorgeschlagen. Man nennt bekanntlich an einem materiellen

Körper den Schnitt zweier ebenen Seitenflächen eine Kante; man nennt ihn Schneide, wenn die beiden Flächen einen sehr spitzen Winkel bilden. Sind aber die beiden eben sein sollenden Seiten etwas konkav ausgefallen, so daß sie sich in ihrer Schnittlinie berühren (und dadurch die Materie des Körpers in der Nähe dieser Schnittlinie so dünn wird, daß sie sich leicht ablöst), so nennt man die Linie einen Grath. Der Querschnitt des Körpers in einem Punkte eines solchen Graths führt auf einen Punkt, der dieselben Eigenschaften hat als der, den ich Grath genannt habe.

Wenn auch im Allgemeinen zum Verständniß des vorliegenden Buches die Kenntniß des oben genannten vorausgesetzt wird, so kann doch Jeder, der die darstellende Geometrie schon kennt und dieses Buch lesen will, sich nach den in dieser Vorrede gemachten Andeutungen in demselben zurecht finden, wenn er die Bedeutungen der in ihm vorkommenden Abkürzungen kennt. Darum sind gleich nach dieser Vorrede für diejenigen Abkürzungen, die aus meinem früheren Lehrbuche entlehnt sind, nicht blos die Worte angegeben, deren Stelle sie vertreten, sondern ist auch die Bedeutung dieser Worte, so weit es in Kürze geschehen konnte, näher bezeichnet, so daß der mit dieser Wissenschaft schon bekannte Leser aus der Liste der Abkürzungen sich wird enträthseln können, worin ich in meiner Bezeichnung und Behandlung der darstellenden Geometrie von dem bisher Gebräuchlichen abweiche, und es

ihm nicht schwer fallen wird, sich in diesem Buche zurecht zu finden.

So wage ich es denn, dieses Buch der Kritik zu übergeben, ein Buch, das leicht mit Mängeln versehen sein kann, da ein großer Theil desselben nicht nach vorgelegenen Mustern gemodelt, sondern selbstständig bearbeitet ist. Doch ich darf wohl erwarten, daß der Kritiker, in Rücksicht darauf, es mit Schonung beurtheilen werde, und somit gebe ich mich der Hoffnung hin, es werde sich dasselbe einer eben so wohlwollenden Aufnahme zu erfreuen haben, als sein Vorgänger, das oben genannte Lehrbuch für Gewerbsschulen.

Nürnberg, im November 1853.

Der Verfasser.

Abkürzungen.

Wir wollen zuerst die Abkürzungen näher erklären, die schon in meinem Lehrbuche für Gewerbsschulen vorkommen.

Für das S (1, 2), d. h. für das von der ersten und zweiten Tafel gebildete System kommen folgende Abkürzungen mit den beigefügten Bedeutungen vor:

T_1 gilt für: erste Tafel oder Tafel eins.

T_2 „ „ zweite „ „ „ zwei.

K „ „ Kante (Achse, Grundschnitt).

L_1, L_2 „ „ erstes, zweites Loth (Senkrechte zur T_1, T_2).

KL_1, KL_2 „ „ „ „ Kantenloth (in der T_1, T_2 senkrecht zur K).

R_1, R_2 „ „ erster, zweiter Riß (Projection auf der T_1, T_2).

A_1, A_2 „ „ „ „ Abstand (Entfernung von der T_1, T_2).

LE (Lothebene) eines Punktes ist die Ebene, welche durch den Punkt geht und senkrecht zur K steht, deren Durchschnitt mit der K wir Kantenriß (KR) nennen. Klappt man nun die Tafeln so um, daß sie die Kante (K) nicht gemeinschaftlich behalten, so erscheint die K und jeder KR zweimal, einmal in der T_1 und einmal in der T_2; für diesen Fall bekommen wir folgende Abkürzungen:

K_1, K_2 gilt für: erste, zweite Kante (d. h. mit der T_1, T_2 umgeklappte K).

KR_1, KR_2 „ „ erster, zweiter Kantenriß (in ähnlichem Sinne).

O_1, O_2 „ „ erste, zweite Ordinate (Entfernung des R_1, R_2 vom KR_1, KR_2).

Ab „ „ Abscisse (Entfernung eines KR von einem als Ursprung angenommenen Punkte der K).

Ab_1, Ab_2 „ „ erste, zweite Abscisse (die eine auf der K_1, die andere auf der K_2 gemessen; für denselben Punkt muß $Ab_1 = Ab_2$ sein).

LE_1, LE_2 „ „ erste, zweite Lothebene (Ebene senkrecht zur T_1, T_2).

S_1, S_2 „ „ erste, zweite Spur (Spur auf der T_1, T_2).

$+$, $-$ „ „ positiv, negativ.

$+ T_1$, $- T_1$ „ „ positive, negative T_1 (werden die beiden durch K_1 entstehenden Theile der T_1 genannt),

$+ T_2$, $- T_2$ „ „ positive, negative T_2.

Die Bedeutung dieser Vorzeichen ist auf folgende Art festgestellt. Wir unterscheiden die beiden Theile des unendlichen Raumes, in welche dieser durch eine Tafel getheilt wird, dadurch, daß wir den einen +, den andern — nennen, und zwar nennen wir denjenigen +, in welchem das Auge des Zeichners oder des Beschauers der Zeichnung sich befindet. Wir nennen + T_2 die T_2, welche im + Raume der T_1 und + T_1 die T_1, welche im + Raume der T_2 liegt. Ferner nennen wir einen A_1 oder A_2 eines Punktes positiv, wenn dieser im + Raume der T_1 oder beziehungsweise der T_2 liegt; eine O_1 (oder O_2) eines Punktes positiv, wenn der R_1 (oder R_2) des Punktes in der + T_1 (oder + T_2) liegt.

P(a) gilt für: Punkt a (Punkt, dessen R_1 mit a_1 (sprich a eins), dessen R_2 mit a_2, dessen KR_1 mit a_1 und dessen KR_2 mit a_2 bezeichnet ist).
G(A) „ „ Gerade A (Gerade, deren R_1 mit A_1 und deren R_2 mit A_2 bezeichnet ist).
G(ab) „ „ Gerade ab (Gerade, die die Punkte a und b enthält).
G(a_1) „ „ Gerade a_1 (Gerade, die in a_1 auf der T_1 senkrecht steht, und daher durch ihren R_1(a_1) bestimmt ist).
E(abc) „ „ Ebene abc (Ebene, welche die Punkte a, b, c enthält).
E(A_1) „ „ Ebene A_1 (Ebene, die in A_1 auf der T_1 senkrecht steht, und daher durch ihren R_1 (A_1) bestimmt ist).

Für ein S (1, 3), d. i. ein von der T_1 und einer darauf senkrechten dritten Tafel (T_3) gebildetes System, bezeichnen wir den Schnitt der beiden Tafeln mit K′ (sprich K prim) und nennen diesen Schnitt Kante prim. Alle Namen und Abkürzungen, die bis jetzt für S (1, 2) aufgeführt sind, bleiben im Wesentlichen dieselben für das S (1, 3), nur haben wir hier 3 statt 2 zu setzen, und alle Abkürzungen und Bezeichnungen, die sich auf die Kante beziehen, im S (2, 3) mit einem Accent (Strich rechts oben) zu versehen, und den Benennungen dafür das Wörtchen „prim" beizufügen. So haben wir z. B. im S (2, 3) einen R_1, R_3, KL'_1, KL'_3, O'_1, O'_3 (dritte Ordinate prim) ꝛc.; es wird also auch der KR'_1 (erster Kantenriß prim) des P(a), statt wie im S (1, 2) mit a_1, im S (1, 3) mit a'_1 bezeichnet.

S (1, 3, K′) gilt für: System 1, 3, K′ (System aus T_1 und der darauf senkrechten T_3 bestehend, deren Schnitt K′ heißt).
S (1, 3, K′, α) „ „ System 1, 3, K′ α (eben so, nur stehen T_1 und T_3 nicht senkrecht zu einander, sondern sie bilden einen Winkel α).

Für das letzte System gilt bezüglich der Namen, Abkürzungen und Bezeichnungen ganz dasselbe, was oben für das S (1, 3) gesagt wurde.

Sucht man die Risse (Projectionen) von Punkten dadurch, daß man, statt der L_1 oder L_2 Gerade anwendet, die entweder zu einer gegebenen Geraden parallel sind (Parallelrisse, Parallelprojectionen, schiefe Risse) oder

durch einen festen Punkt (Centrum) gehen (Centralrisse, Centralprojectionen), so nennen wir die Geraden, welche die Stelle der Lothe vertreten, Strahlen (St) und jede Ebene, in der Strahlen gezogen werden können, eine Strahlenebene (StE). Heißt ein P (a), so bezeichnen wir den durch einen Strahl erhaltenen Riß mit a', für ein zweites System von Strahlen mit a'' u. s. f. Dadurch erhalten wir noch folgende Abkürzungen:

R', R''	gilt für:	Riß prim, Riß secund.
St', St''	„ „	Strahl prim, Strahl secund.
StE', StE''	„ „	Strahlenebene prim, Strahlenebene secund.
G (a')	„ „	Gerade a' (Gerade, deren R' ein P(a') ist, die also ein durch a' gehender St' ist).
E(A')	„ „	Ebene A' (Ebene, deren R' die Gerade A' ist, die also eine durch A' gehende StE' ist).

Hat man von dem Punkt a', der den R' eines P(a) vorstellt, den R_1 (a'_1) und den R_2 (a'_2), so ist der eine der R_1, der andere der R_2 des R' des P(a). Dadurch erhalten wir noch folgende Abkürzungen:

R'_1, R'_2	gilt für:	erster, zweiter Riß prim (d. h. erster, zweiter Riß, des R').
St'_1, St'_2	„ „	erster, zweiter Strahl prim (d. h. erster, zweiter Riß, des St').
X	„ „	schneidet.
||	„ „	ist parallel.
|	„ „	liegt in, oder enthält
⊥	„ „	ist senkrecht.

Nun kommen noch die Abkürzungen, die im vorliegenden Buche neu sind. Für diese ist die Nr. des Buches beigefügt, in der sie näher erklärt sind.

C	gilt für:	Curve (1).
C(A)	„ „	Curve A (2).
C(abc)	„ „	Curve abc (2).
LCF	„ „	Lothcylinderfläche (101).
Tg	„ „	Tangente (13, 108).
N	„ „	Normale (14, 110).
TE	„ „	Tangentialebene (19, 109).
NE	„ „	Normalebene (19, 110).
Ez	„ „	Erzeugende (73).
SchL	„ „	Schneidlinie (74).
UR_1	„ „	erster Umriß (81).
Pr_1	„ „	erstes Profil (81).
S_1	„ „	erste Spur (82).
WF	„ „	windschiefe Fläche (87).
EF	„ „	entwickelbare Fläche (90).

KF " " Kegelfläche (91).
CF " " Cylinderfläche (92).
DF " " Drehungsfläche (93).
OF " " Ovalfläche (94).

WF (A, B, C)
WF (A, B, $\mathfrak{T}_1$)
WF (A, B, a_2)
WF (A, a_1, α) } (s. 96).

CF (A, B)
CF (A) } (s. 97).

KF (A, a) (s. 98).
CF (A, || B) (s. 100).
CF (A_1) (s. 101).

KF (A′)
CF (A′) } (s. 102).

DF (A)
DF (A, a_1)
DF (A, B) } (s. 103).

DCF
DKF } (s. 105).

OF $\left(A, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ (s. 107).

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Von den Curven.

§. 1. Regeln über die graphische Bestimmung von Curven überhaupt.

§. 2. Berührungen von Curven.

§. 3. Umhüllungscurven.

§. 4. Krümmung und Windung von C.

§. 5. Zeichnung und Eigenschaften der für die Anwendung wichtigeren Curven und Construction ihrer Tangenten und Normalen.

Zweiter Abschnitt.

Von den krummen Flächen.

§. 6. Allgemeine Regeln zur Bestimmung krummer Flächen.

§. 7. Eintheilung der Flächen.

§. 8. Graphische Bestimmung der verschiedenen Flächen, ihre Bezeichnungen und Arten.

§. 9. Berührung von Flächen mit Geraden und Ebenen.

§. 10. Umhüllungsflächen.

§. 11. Eigenschaften der verschiedenen Flächen.

§. 12. Aufgaben über TE und Tg an Flächen.

§. 13. Durchschnitte von Flächen mit Linien und Flächen.

§. 14. Tg und Asymptoten an Schnittcurven.

§. 15. Entwickelung entwickelbarer Flächen.

Darstellende Geometrie.

Erster Abschnitt.

Von den Curven.

§. 1.

Regeln über die graphische Bestimmung der Curven überhaupt.

1. Es wird dem Schüler aus der Elementargeometrie bekannt sein, daß man jede Linie, von der kein Theil gerade ist, eine krumme Linie oder Curve nennt. Es ist aber die Aufgabe der darstellenden Geometrie, zu zeigen, wie man die C durch Zeichnung bestimmt; dies soll in diesem Paragraph geschehen. Wir müssen dabei voraussetzen, daß der Schüler mit dem Theil der darstellenden Geometrie, der sich mit den Sätzen und Aufgaben über Gerade und Ebenen abgiebt, bereits vertraut ist, daß er aber auch mit der von uns gebrauchten Bezeichnungsweise*) bekannt gemacht worden ist.

So wie zur Bestimmung von Geraden, so nimmt man auch zur Bestimmung von krummen Linien (Curven, abg. C) zwei auf einander senkrechte Tafeln an, auf welchen man nach deren Umklappung die Risse der C verzeichnet. Während aber der R_1 einer Geraden entweder ein Punkt oder eine Gerade, und demnach durch höchstens zwei Punkte der Geraden schon bestimmt ist, so findet diese Bedingung bei den C in der Regel nicht statt. Denken wir uns nemlich durch alle Punkte einer C erste Lothe (L_1) gelegt, so können diese nicht zusammenfallen, weil sonst die sämmtlichen Punkte in

*) Man findet diese in dem Lehrbuche der darstellenden Geom. für Gewerbsschulen, von F. A. Klingenfeld, Nürnberg bei J. L. Schrag 1851.

dem gemeinschaftlichen L_1, also in einer Geraden lägen, und daher keine C gäben. Es müssen daher die L_1 einer C eine Fläche bilden, die wir die erste Lothfläche (LF_1) der C nennen wollen. Diese LF_1 ist in dem besonderen Falle, und nur in diesem, eine Ebene, wo die C in einer auf der T_1 senkrechten Ebene liegt; dann nennen wir diese LF_1 die erste Lothebene (LE_1) der C. In jedem anderen Falle ist die LF_1 der C eine krumme Fläche, die wir die erste Lothcylinderfläche (LCf_1) der C nennen werden. Es ergeben sich demnach folgende Sätze:

1) Der R_1 einer C kann nie ein Punkt sein. Er ist in der Regel eine krumme Linie, und nur dann eine Gerade, wenn die C in einer LE_1 liegt.

2) Liegt eine C in einer zur T_2 parallelen Ebene, so ist ihr R_1 || K_1, und umgekehrt. Da man in diesem Falle die K_1 so annehmen kann, daß sie mit dem R_1 der C, also die C selbst in der T_2 liegt und mit ihrem R_2 zusammenfällt, so folgt:

3) Wenn der R_1 einer C || K_1 ist, so ist ihr R_2 kongruent mit der C selbst.

Anm. 1. Setzt man in den eben gemachten Entwickelungen sowohl, als in den Sätzen zwei statt eins, so erhält man ähnliche Resultate für die zweite Tafel. Da diese Bemerkung auch für alle folgenden Entwickelungen und Sätze gilt, so werden wir es auch künftig dem Schüler überlassen, die für die T_1 gewonnenen Resultate auch für die T_2 auszusprechen.

Anm. 2. Ist von einer C der Parallelriß (Parallelprojection) gesucht, so bilden die Strahlen ihrer Punkte in der Regel eine krumme Fläche, die wir den Strahlencylinder der C nennen, während die bei Centralrissen (Centralprojectionen) einer C von den Strahlen ihrer Punkte gebildete krumme Fläche ihr Strahlenkegel heißt. Ist aber in beiden Fällen die von den Strahlen gebildete Fläche eben, so heißt diese bekanntlich die Strahlenebene der C.

2. Ist der R_1 einer C eine Gerade, so kann es in der Regel ihr R_2 nicht sein. Denn wäre auch der R_2 eine Gerade, so müßte die C in den beiden durch ihre Risse bestimmten LE liegen. Fallen daher diese LE nicht in eine zusammen, so wäre die C der Durchschnitt zweier Ebenen, also eine Gerade und keine C.

Fallen aber die beiden durch die Risse der C bestimmten LC zusammen, in welchem Falle die C in einer zur K senkrechten Ebene liegt, so sind ihre beiden Risse Gerade, die senkrecht zur K sind. Allein in diesem Falle bestimmen ihre beiden Risse nur eine einzige Ebene, in der die C liegt, und lassen daher außerdem die C unbestimmt; es müßte deshalb der R_3 der C auf einer T_3 angegeben werden, die auf der Ebene der C nicht senkrecht steht; dieser R_3 wäre dann eine krumme Linie.

3. Wir denken uns jede C durch einen Buchstaben aus dem großen lateinischen Alphabete bezeichnet, und schreiben an die Risse denselben Buchstaben, den wir rechts unten mit der Zahl versehen, die der Tafel entspricht, in der der Riß liegt. Ist daher die C mit A bezeichnet gedacht, so schreiben wir an ihren R_1 den Buchstaben A_1, an ihren R_2 den Buchstaben A_2.

Wir verstehen daher unter Curve A, abgekürzt C (A), die C, deren Risse mit A_1, A_2 bezeichnet sind. Dagegen verstehen wir unter C (abc..) die C, welche die Punkte a, b, c... enthält.

4. Ist der Riß einer C gerade, so genügen zwei Punkte desselben, um ihn mit Hilfe eines Lineals, ist er kreisförmig, so reichen der Mittelpunkt und ein Punkt der Peripherie hin, um ihn mittelst des Zirkels zu zeichnen. Ist er aber von anderer Gestalt, so besitzen wir kein Werkzeug, um ihn mit dessen Hilfe in einem Zuge zu zeichnen. Es bleibt uns daher nichts übrig, als recht viele so nahe an einander liegende Punkte aufzusuchen, daß das Auge die Gestalt des Risses daraus erkennen kann. — Ein geübter Zeichner kann dann mit dem Bleistifte aus freier Hand eine Linie durch die Punkte führen, und sie an unrichtig scheinenden Stellen so lange ausbessern, bis sie seinem Auge als hinreichend übereinstimmend erscheint mit der Linie, die durch die aufgesuchten Punkte bestimmt ist. Das Ausziehen der Linie mit Tusche geschieht dann entweder ebenfalls aus freier Hand, oder mit Hilfe eines Curvenlineals, d. h. eines Lineals, das mit verschiedenen Krümmungen versehen ist; man legt dann an die einzelnen Stücke der zu zeichnenden Curve die am besten passenden Krümmungen des Lineals um die Curve stückweise mittelst der Ziehfeder auszuziehen. Es giebt noch ein drittes Mittel, die aufgefundenen Punkte zu verbinden, ohne eine C aus freier Hand zeichnen zu müssen und

das darin besteht, daß man jeden zwischen zwei nächstliegenden gefundenen Punkten eingeschlossenen Bogen der zu zeichnenden Linie als Kreisbogen ansieht, die Mittelpunkte dieser Bögen nach später entwickelten Regeln aufsucht, und sie mittelst des Zirkels zeichnet. Da hiezu weder ein geübtes Auge noch eine geübte Hand gehört, so ist diese Methode am meisten zu empfehlen.

5. Nach welcher der oben genannten Arten man auch die Risse einer darzustellenden C bezeichnen mag, immer ist es nothwendig, die Risse von beliebig vielen Punkten der C auffinden zu können; demnach müssen alle Punkte der C bestimmt sein. Wir wollen daher, wenn auch nicht alle, so doch wenigstens die in der Anwendung gebräuchlichsten Mittel zur Bestimmung aller Punkte einer Curve angeben. In dem vorliegenden Paragraph bestimmen wir jede C dadurch, daß wir dieselbe durch einen nach einem gegebenen Gesetze beweglichen (erzeugenden) Punkt beschreiben (erzeugen) lassen, d. h. der nach dem gegebenen Gesetze bewegliche Punkt soll in allen seinen Lagen, die er diesem Gesetze gemäß einnehmen kann, in der zu bestimmenden Curve liegen. Die am häufigsten vorkommenden Erzeugungs-Gesetze sind folgende:

1) Der erzeugende Punkt soll auf einer gegebenen Fläche bleiben, und seine Entfernungen von zwei Punkten oder zwei Linien oder einem Punkte und einer Linie müssen in bestimmten Beziehungen zu einander stehen (so daß die eine Entfernung sich aus der andern finden läßt). Die gegebenen Punkte oder Linien werden Leitende (Leitpunkt, Leitlinie) der (zu bildenden) C genannt.

2) Der erzeugende Punkt soll auf einer Fläche sich so bewegen, daß er mit einer auf dieser Fläche nach einem gegebenen Gesetze bewegten Linie in fester Verbindung bleibt. Die bewegte Linie wird die Erzeugende der C genannt. Das Gesetz, nach welchem sich die Erzeugende bewegt, wird bestimmt durch gegebene feste Punkte oder feste Linien (Leitende), gegen welche die Erzeugende bestimmte Bedingungen zu erfüllen hat.

3) Der erzeugende Punkt soll sich auf einer beweglichen Linie (Erzeugende) nach einem Gesetze bewegen, das mit dem Bewegungsgesetze der Erzeugenden in gegebener Beziehung steht.

6. Jeder nach einem gegebenen Gesetze erzeugten Curve werden wir einen Namen geben, und daher alle nach demselben Gesetze gebildete C **gleichnamig** nennen. Es läßt aber jedes Erzeugungsgesetz einer C noch unzählige Gestalten der C zu, je nach der gegenseitigen Lage der Leitenden und je nach den zu gebenden Größen, durch welche die verschiedenen Beziehungen ausgedrückt werden. So z. B. nennt man bekanntlich eine in einer Ebene liegende C, deren Punkte alle von einem in dieser Ebene gegebenen festen Punkte (Mittelpunkt) gleich weit abstehen, eine Kreislinie. Die C verdient daher diesen Namen, wieweit auch ihre Punkte von dem Mittelpunkte entfernt sind und es giebt daher auch unzählig vielerlei Kreislinien, weil die zu gebende Länge (der Halbmesser) unendlich verschieden sein kann. Sind aber für zwei gleichnamige C alle gegebenen Längen und Winkel der einen beziehungsweise denen der anderen gleich, so sind die Curven kongruent ($\cong$); sind die Winkel beziehungsweise gleich und die Längen der einen in demselben Verhältniß wie die entsprechenden der anderen, so sind die Curven ähnlich ($\sim$).

7. Es ist nicht immer nothwendig, daß zwei C, die nach verschiedenen Gesetzen gebildet sind, ungleichnamig ausfallen, sondern es kann sich treffen, daß beide Gesetze auf zwei gleichnamige führen. Will man sich darüber Gewißheit verschaffen, so muß man im Stande sein, das eine Gesetz auf das andere oder beide auf ein drittes zurückzuführen. Wir werden später Gelegenheit haben, darüber Beispiele zu machen.

8. Ist die Fläche, in der sich der erzeugende Punkt bewegen muß, eine Ebene, so nennt man die C eine **ebene** Curve, wo nicht, eine **gewundene** (unebene, doppelt gekrümmte, windschiefe) C. Liegt die C auf einer Kugelfläche, so heißt sie eine **sphärische** C. Kommt der erzeugende Punkt, von welchem Punkte der C man ihn auch ausgehen läßt, wieder in seine ursprüngliche Lage zurück, so nennt man die C **geschlossen**, wo nicht, **offen**.

Wird eine **ebene** C von einer in ihrer Ebene liegenden Geraden symmetrisch getheilt, so heißt sie eine **symmetrische** C und die Gerade ihre **Achse**. Schneidet diese Achse die C, so nennt man den Schnittpunkt **Scheitel** und die Achse **reel**, wo nicht, **immaginär**. Hat eine Curve zwei zu einander senkrechte Achsen, so nennt man deren Durchschnitt den Mittelpunkt (Centrum)

und jede durch diesen Punkt gelegte Gerade einen Durchmesser (Diameter) der C.

Läßt das Erzeugungsgesetz einer C zwei nicht im Zusammenhang stehende Curven zu, so nennen wir beide zusammen eine Doppelcurve, und wenn es eine Gerade A giebt, gegen welche diese beiden C symmetrisch liegen, eine Zwillingscurve, und die Gerade ihre Achse. Im Gegensatz hiezu nennen wir eine C einfach, wenn ihr Gesetz nur eine einzige C zuläßt.

Fig. 1. 9. Sind die Risse einer C so ausgefallen, daß jedem Punkte a_1 ihres R_1 zwei R_2 nemlich a_2 und b_2 entsprechen können, während, ihrem Erzeugungsgesetze nach, der Punkt, dessen R_1 in a_1 liegt, a_2 zum R_2 haben muß, so ist es nothwendig (wenn nicht durch andere Mittel schon diese Zweideutigkeit gehoben ist) außer den Rissen der C noch einen Punkt in ihr, z. B. P (a), zu geben; dann nennen wir diese Curve (Aa). Hat man den einen Punkt a, so ist für alle anderen Punkte bestimmt, wie ihre Risse zusammen gehören. So z. B. wird man einsehen, daß der Punkt, dessen R_1 in c_1 liegt, seinen R_2 nicht in d_2, sondern in c_2 haben müsse. Denn denkt man sich den P (a) (nach c hin) fortbewegt, bis sein R_1 nach c_1 kommt, so kann sein R_2 nicht in d_2 sein, weil sonst sein L_2 bei seiner Bewegung mit der G (e_2) hätte zusammenfallen müssen, in welchem Falle der Punkt a in den Punkt e, also auch a_1 nach e_1 gekommen wäre; dies kann aber nicht sein, weil c_1 zwischen a_1 und e_1 liegt.

10. Ist die Fläche, in der sich der erzeugende Punkt zu bewegen hat, eben, so nehmen wir zur Darstellung der C die Tafeln so an, daß eine davon, z. B. die T_1 mit der Ebene der C und daher der R_1 der C mit dieser selbst zusammenfällt. Sind aber die T_1 und T_2 schon gegeben, und kann keine von beiden mit der Ebene der C zusammenfallend gemacht werden, so nimmt man eine T_3 an, in der die C liegt, sucht nach ihrer Umklappung den R_3 der C und daraus ihren R_1 und R_2. Wir wollen darüber in der folgenden Nummer ein Beispiel machen.

Fig. 2. 11. Aufg. Es sind gegeben die Punkte a, b und c; gesucht die Risse einer durch diese Punkte bestimmten Kreislinie A.

Aufl. Man nimmt die E (abc) als T_3, so ist die S_1 dieser Ebene die K'. Klappt man nun die T_3 um, etwa so, daß

die $\mathfrak{K}'_1$ und $\mathfrak{K}'_3$ zusammenfallen, und sucht (nach * 70.) *) a_3, b_3 und c_3, so ist die Kreislinie A_3, die durch a_3, b_3 und c_3 geht, der $\mathfrak{R}_3$ unseres Kreises A. Sucht man nun von beliebig vielen Punkten, deren $\mathfrak{R}_3$ in A_3 liegen, den $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, so bekommt man die Risse der Kreislinie A.

Anm. Wir wollen bei dieser Gelegenheit ein- für allemal bemerken, daß wir in der Folge unter dem Halbmesser eines Kreises die Länge verstehen, die der Entfernung seines Centrums von einem Punkte seiner Peripherie gleich ist, während wir unter seinem Radius (Strahl) jede Gerade verstanden wissen wollen, die durch seinen Mittelpunkt geht, ohne Rücksicht auf ihre Grenzpunkte.

§. 2.

Berührungen von Curven.

12. Zwei Punkte einer Curve, die so nahe liegen, daß der von ihnen eingeschlossene Curvenbogen als gerade betrachtet werden kann, werden Nachbarpunkte und der zwischen ihnen enthaltene Bogen Element der Curve genannt. Da aber jedes meßbare Stück einer C krumm ist, so kann nur der Bogen als wirklich gerade angesehen werden, dessen Endpunkte unendlich nahe an einander liegen, deren Entfernung also unmeßbar klein ist, und die daher in der Zeichnung in einen Punkt zusammenfallen. Mehrere aufeinander folgende Punkte a, b, c, d ꝛc., die so liegen, daß je zwei aufeinander folgende Punkte Nachbarpunkte sind, sollen Folgepunkte und die von ihnen gebildeten Elemente ab, bc, cd ꝛc. Folge-Elemente heißen. Zwei Folge-Elemente, ab, bc z. B., die also einen P (b) gemein haben, nennt man Nachbar-Elemente.

13. Nimmt man auf einer C einen P(a) an, so wird sie durch ihn in zwei Theile getheilt, auf deren jedem ein Nachbarpunkt von a liegt, von denen einer b, der andere c heißen mag. Legt man durch a und einen P (d) der C eine Gerade A und

*) Eine eingeklammerte Nummer, die einen * vor sich hat, bezieht sich auf mein Lehrbuch der darstellenden Geom. für Gewerbschulen; eine Nummer ohne * auf das vorliegende Buch, und eine Nummer, vor der „Anh." steht, auf den Anhang des vorliegenden Buches.

dreht diese so, daß der P(d) dem P(a) immer näher rückt, so wird die Lage der Geraden, in welcher der P(d) mit dem P(a) zusammenfällt, eine Berührungslinie oder Tangente (abgekürzt Tg) der C im P(a), und a ihr Berührungspunkt genannt. Dreht man die Gerade A blos so weit, bis der P(d) mit dem P(b) zusammenfällt, so ist sie, genau genommen, in dieser Lage keine Tg; allein da sie offenbar mit der Tg einen so unendlich kleinen Winkel bildet, daß sie in der Zeichnung von ihr nicht unterschieden werden kann, so können wir auch diese Lage der Geraden A als Tg für den P(a) ansehen. Dasselbe gilt ebenso für diejenige Lage der Geraden A, in der der P(d) auf den P(c) gefallen ist. Wir lassen daher den Satz gelten:

1) Wenn eine Gerade mit einer C einen P(a) gemein hat und außerdem noch einen dem P(a) benachbarten Punkt der C enthält, so ist die Gerade eine Tg der C, die diese im P(a) berührt.

Da eine Gerade, die mit einer andern irgend zwei Punkte, also auch zwei Nachbarpunkte gemein hat, mit ihr zusammenfällt, so folgt der Satz:

2) Die Tg einer Geraden in irgend einem ihrer Punkte ist die Gerade selbst.

Wir werden uns später überzeugen, daß es für gewisse C Gerade giebt, die man als Tg der C ansehen kann, deren Berührungspunkte in unendlicher Entfernung liegen; solche Gerade nennt man Asymptoten der C.

Anm. Die oben gegebene Erklärung einer Tg an einer C giebt uns ein Mittel an die Hand, an eine in einer Tafel gezeichnete C für einen P(a) derselben annähernd eine Tg zu zeichnen. Legt man nemlich ein Lineal so, daß seine Kante durch a geht, und außerdem durch einen P(d) der C, und dreht man dieses Lineal so lange um a, bis das Auge die Lage zu sehen glaubt, in der der P(d) auf a gefallen ist, so ist die Gerade, welche die Kante des Lineals bestimmt, annähernd eine Tg der C im P(a). So ist z. B. in der Fig. 3 die G(B_1) eine Tg der C(A_1) im P(a_1).

14. Zieht man durch einen P(a) einer C eine Gerade B, die auf der im P(a) an die C gelegten Tg senkrecht steht, so

nennt man diese G(B) eine Normale (abgek. N) der C im P(a), und den P(a) den Fußpunkt der N. Bezeichnen wir wieder den Nachbarpunkt von a mit b, und denken uns das unendlich kleine Curvenstück ab senkrecht halbirt, so ist die so erhaltene Gerade, genau genommen, nicht die G(B), aber, wenn wir sie zeichnen, so läßt sie sich, da sie ihr unendlich nahe liegt, von ihr nicht unterscheiden. Wir lassen daher den Satz gelten:

1) Wenn eine Gerade auf einer Tg einer C in ihrem Berührungspunkte senkrecht steht, oder wenn sie ein Element der C senkrecht halbirt, so ist sie eine Normale der C.

Hieraus folgt:

2) Jeder Radius einer Kreislinie ist eine Normale derselben.

15. Haben zwei C zwei Nachbarpunkte a, b gemein, so ist die Gerade ab Tg an beiden im P(a), und umgekehrt. Es ist aber auch in diesem Falle jede in a zur Geraden ab errichtete Senkrechte eine N für beide C im P(a), und umgekehrt. Es folgt daher der Satz:

Damit sich zwei C im P(a) berühren, ist es nothwendig, aber auch gerade genügend, daß sie in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Tg oder N haben.

16. Wird eine C(A) von einer Geraden im P(a) berührt, d. h. hat sie mit der Geraden außer a noch den ihm benachbarten P(b) gemein, so kann diese Tg oder, was dasselbe ist, die G(ab) entweder auf der T_1 senkrecht stehen, d. h. ein L_1 sein oder nicht. Im ersten Falle ist der R_1 der Tg der Punkt a_1 und ihr R_2 (welcher durch a_2 geht) ist $\perp$ K_2. Im zweiten Falle geht der R_1 der Tg, welcher eine Gerade ist, durch a_1 und b_1; da aber diese Punkte unendlich nahe liegen, so hat hier der R_1 der Tg mit dem R_1 der C(A) zwei Nachbarpunkte (a_1 und b_1) gemein. Wir haben also den Satz:

Der R_1 einer Tg an einer C(A) im P(a) ist entweder der P(a_1) oder eine in a_1 zu A_1 gezogene Tg.

Anm. Setzt man in der eben gemachten Entwickelung St' (s. * 71 u. folg.) statt L_1 und R', A', a' statt R_1, A_1, a_1, so kann man sich leicht überzeugen, daß der eben ausgesprochene Satz auch für schiefe und Central-Risse gilt.

Fig. 3. 17. Hat man die Risse einer C(A) und auf ihr einen P(a), für den die Tg der C(A) gesucht ist, so darf man nur in a_1 eine Tg(B_1) an A_1 und in a_2 eine Tg(B_2) an A_2 legen (Fig. a), so sind B_1, B_2 die Risse der gesuchten Tg. Ist aber (wie in Fig. b und c) der R_2 der Tg für den Punkt a $\perp$ K_2, so ist die Tg selbst entweder blos senkrecht zur K oder sie ist $\perp$ T_1; im ersten Falle muß (wie in Fig. b.) der R_1 der Tg eine Gerade sein, die senkrecht zur K steht, und A_1 in a_1 berührt; giebt es aber (wie in Fig. c.) in a_1 keine Tg an A_1, die zugleich $\perp$ K_1 ist, so kann es nicht anders sein, als daß die gesuchte Tg $\perp$ T_1 ist, und demnach a_1 zum R_1 hat. In Fig. b. aber ist die Tg aus ihren beiden Rissen nicht bestimmt, und wird erst bekannt, wenn man eine T_3 zu Hilfe nimmt, den R_3 der C(A) und des P(a) sucht, in a_3 an A_3 eine Tg(B) legt, und von irgend einem P(b) der Tg(B), dessen R_3 man beliebig annehmen kann (am besten, wie in unserer Fig., in K'), den R_1 und R_2 sucht, wodurch man die G(ab) als die gesuchte Tg erhält.

Wir wollen einen solchen Punkt einer C, dessen Tg in einer zur K senkrechten Ebene liegt (diese Tg kann nebenbei auch auf einer Tafel senkrecht stehen), den Profilpunkt oder das Profil (abgek. Pr) der Curve nennen.

18. Haben zwei C einen P(a) gemein ohne sich in ihm zu berühren, so sagt man sie schneiden sich im P(a). Man versteht dann unter dem im P(a) von ihnen gebildeten Winkel denjenigen, welchen die im P(a) an die C gelegten Tg mit einander einschließen. Hat eine C mit einer Geraden, die keine Tg von ihr ist, einen P(a) gemein, so schneiden sich diese Linien im P(a), und bilden im P(a) den Winkel, welchen die Gerade mit der im P(a) an die C gelegten Tg einschließt. Wenn eine C und eine Ebene einen Punkt a gemein haben, so versteht man unter dem Winkel der C und Ebene im P(a) denjenigen, welchen die Ebene mit der im P(a) an die C gedachten Tg bildet.

19. Ist der Winkel, den eine C mit einer Ebene im P(a) bildet, = o, d. h. liegt die Tg für den P(a) in der Ebene, so nennt man diese eine Berührungsebene, Tangentialebene (TE) der C im P(a) und a ihren Berührungspunkt; ist jener Winkel ein rechter, d. h. steht die Ebene im P(a) auf der Tg

für den P(a) senkrecht, so nennt man die Ebene Normalebene (NE) der C im P(a) und a ihren Fußpunkt.

20. Kommt der erzeugende Punkt einer C bei seiner Bewegung mehr als einmal durch einen bestimmten P(a) der C, so nennt man diesen P(a) einen doppelten, dreifachen, vierfachen ꝛc. Punkt, je nachdem der erzeugende Punkt zweimal, dreimal, viermal ꝛc. durch ihn kommt. Für diesen Punkt kann es so viele Tg geben, als der Punkt vielfach ist. Für einen Doppelpunkt giebt es in der Regel zwei Tg an die C und man sagt dann, die C schneidet sich selbst in diesem Punkte. Fallen aber ausnahmsweise die beiden Tg für den Doppelpunkt in eine zusammen, so sagt man, die C berührt sich selbst in diesem Punkte. Aehnlich verhält es sich bei dreifachen, vierfachen ꝛc. Punkten.

21. Unter der Entfernung eines Punktes a von einer C (A) versteht man die Entfernung dieses P(a) von demjenigen Punkte b der C(A), für welchen die G(ab) eine N ist. Es giebt daher so viele Entfernungen des P(a) von der C(A), als es Fußpunkte von N giebt, die durch den P(a) gehen.

22. Haben zwei in derselben Ebene liegende C die Eigenschaft, daß alle Punkte der einen C gleich weit von der andern entfernt sind, so nennen wir die beiden C parallel.

§. 3.

Umhüllungscurven.

23. Gesetzt, es soll sich eine Linie von bestimmtem Namen (s. 6) nach einem gegebenen Gesetze bewegen, und es ist gesucht die C, welche von allen Lagen der bewegten Linie berührt wird.

Sind nun a, b, c, d ꝛc. Folgepunkte (12.) und A, B, C, D ꝛc. aufeinanderfolgende Lagen der bewegten Linie, so daß die gesuchte C mit A das Element ab, mit B das Element bc, mit C das Element cd ꝛc. gemein hat, so sieht man, daß sich A und B nach a, B und C nach b, C und D nach d ꝛc. schneiden. Da nun A und B, B und C ꝛc. unendlich nahe an einander liegen, so geht hieraus hervor, daß die verlangte C auch erhalten wird, wenn man die Punkte sucht, in denen je zwei unendlich nahe Lagen der bewegten Linie sich schneiden. Eine solche C, welche durch die Bewegung einer Linie von bestimmtem Namen entsteht, die sie in allen ihren

Lagen berührt, nennt man eine Umhüllungscurve und die durch ihre Bewegung sie erzeugende Linie heißt in allen ihren Stellungen ihre Umhüllte.

Fig. 4. 24. Es sei die Umhüllte, d. h. die sich bewegende Linie eine Gerade. Um nun die gesuchte C zu erhalten, zeichnet man die bewegliche Gerade (welche sich in der vorliegenden Figur so bewegen soll, daß sie in der T_1 bleibt und zu der in T_1 liegenden C (M) stets N ist) in sehr nahe liegenden Lagen, und sodann eine C (N), welche alle diese Geraden berührt. Nennen wir die Punkte, in denen die Umhüllten A, B, C, D ꝛc. von der C (N) berührt werden, nach einander a, b, c, d, und betrachten wir um die C (N) aus Kreisbögen zusammen zu setzen, $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$ ꝛc. als Kreisbögen, so liegt das Centrum des Kreises für den Bogen ab in der Geraden O, die den Winkel von A und B so wie den Bogen ab halbirt. Hat man daher a, so läßt sich der Mittelpunkt m für den Bogen ab finden, wenn man in a eine G (am) ⊥ A zieht. Hat man m, so läßt sich b finden durch die G (mb) ⊥ G (B). Ist aber von den Punkten a, b, c ꝛc. keiner bekannt, so nimmt man die ersten drei Umhüllte A, B, C so nahe an einander an, daß die Bögen ab und bc von gleichem Halbmesser sind, und demnach die zwei Halbirungslinien ihrer zwei auf einander folgenden Winkel sich in einem Punkte m schneiden, der von A, B und C gleich weit absteht. Fällt man nun von m die zu A, B, C senkrechten ma, mb, mc, welche sie in den Punkten a, b, c schneiden, so ist der Kreisbogen abc als Bogen der C (A) zu betrachten, und man kann, da der Punkt a ein Punkt der C (B) ist, mittelst dessen die folgenden Punkte eben so finden, wie vorhin, wo der P (a) als bekannt angenommen war.

Fig. 5. 25. Es sei ferner die Umhüllte eine Kreislinie, die sich in ihrer Ebene (hier in der T_1) so fortbewegen soll, daß ihr Mittelpunkt eine gegebene C (M) durchläuft und ihr Halbmesser unverändert bleibt.

Ist a ein Punkt der C (M), welcher der Mittelpunkt der Kreislinie A ist, und suchen wir, wo A von einer Kreislinie B zerschnitten wird, die ihren Mittelpunkt im P (b) der C (M) hat, so sieht man leicht ein, daß dies in den Punkten p und q geschieht, die erhalten werden, wenn man die Schnitte der Kreis-

linie A mit der Geraden sucht, die $\overline{ab}$ *) senkrecht halbirt. Liegt nun b unendlich nahe an a, so ist die G (ab) die Tg der C (M) im P (a) und daher die senkrechte Halbirungslinie von $\overline{ab}$ die N der C (M) in a. Da aber in diesem Falle, wo nemlich $\overline{ab}$ ein Element der C (M) ist, die Schnitte der Kreislinie A mit der aus b beschriebenen Punkte unserer Umhüllungscurve sind, so erhält man folgenden Satz:

1) Wenn die Umhüllte eine Kreislinie mit unveränderlichem Halbmesser ist, die sich in ihrer Ebene so bewegt, daß ihr Mittelpunkt eine C (M) beschreibt, so erhält man die Punkte m, n, welche eine Umhüllte A mit der gesuchten Umhüllung gemein hat, wenn man sucht, wo A von der in ihrem Mittelpunkt a zur C (M) gezogenen N geschnitten wird.

Da ferner sowohl die Punkte m als die n eine C geben, so folgt:

2) daß unsere Umhüllung eine Doppel-C ist (§. 8.), oder daß durch die Umhüllte zwei Umhüllungs-C gebildet werden.

Weil endlich unsere Umhüllung in m und n von A berührt wird (§. 23.), so hat sie in diesen Punkten mit A eine gemeinschaftliche N; und da G (mn) die N für A in den Punkten m und n ist, so ist in diesen Punkten die G (mn) auch N der gesuchten Umhüllungscurve. Wir sehen daher

3) daß jede N der C (M) zugleich N der beiden Umhüllungscurven ist, und

4) daß alle Punkte der Umhüllungscurve gleich weit (um den Halbmesser von A) von M entfernt sind, diese C demnach mit M parallel laufen (§. 22.).

Anm. Es läßt sich nachweisen und ist auch bekannt, daß eine Parallele zu einer Geraden wieder eine Gerade, eine in der Ebene einer Kreislinie liegende Parallele zu dieser wieder eine

*) Während wir unter G (ab) die Gerade, unter C (ab) die C verstehen, welche durch die Punkte a und b geht, ohne ihre Grenzen zu berücksichtigen, verstehen wir unter G ($\overline{ab}$) oder $\overline{ab}$ die von den Punkten a und b begrenzte Gerade, unter C ($\frown{ab}$) oder $\frown{ab}$ die von a und b begrenzte C.

Kreislinie ist. Man kann aber nicht nachweisen, und es ist auch in der Regel nicht der Fall, daß eine zu einer anderen ebenen C (M) in ihrer Ebene gezogene Parallele mit M gleichnamig ist.

§. 4.

Krümmung und Windung von Curven.

26. Man denke sich zu einer C (A) in einem P (A) derselben (dessen Nachbarpunkt b heißen mag, während der folgende Nachbarpunkt von b mit c bezeichnet werde) eine NE und eine Tg (C), und auf der NE einen P (d) angenommen, den man als Centrum einer durch a gehenden Kreislinie B ansieht, so ist die Gerade ad im P (a) sowohl N von B als von A; demnach wird die C (A) von der Kreislinie B im P (a) berührt (s. 15.). Da diese Behauptung wahr bleibt, in welchem Punkte der NE für a man den P (d) annimmt, so sieht man, daß es in einem P (a) einer C (A) an diese unzählige berührende Kreislinien giebt, deren Mittelpunkte in der dem P (a) entsprechenden NE der C (A) liegen. Man kann daher zur näheren Bestimmung des Centrums unseres Berührungskreises noch die Bedingung hinzufügen, daß seine Peripherie durch einen P (e) der C (A) gehen soll. In diesem Falle ist die Ebene des Kreises durch C und e bestimmt und liegt daher sein Centrum in der Geraden der E (Ce), welche die G ($\overline{ae}$) senkrecht halbirt. Läßt man nun den P (e) dem P (a) immer näher rücken (wodurch sich natürlich auch die Lage des Mittelpunktes d verändert), bis er endlich mit dem P (a) zusammenfällt, so wird in dieser Lage des P (e) unser Berührungskreis der Krümmungskreis (Osculationskreis) der C (A) im P (a) genannt, und es giebt also für jeden Punkt einer C (wenn er anders kein vielfacher Punkt (s. 20.) ist) einen einzigen Krümmungskreis. Nehmen wir nun als unsere NE in a die Ebene, welche das Element $\widehat{ab}$ senkrecht halbirt (s. 14. und 19.) und lassen den P (e), anstatt ihn mit a zusammenfallen zu lassen, auf den P (c) fallen, so werden wir einen Kreis erhalten, der genau genommen, nicht unser Krümmungskreis ist, aber ihm so nahe liegt, daß wir ihn von diesem nicht unterscheiden können; wir können daher auch diesen Kreis, der also

durch die Punkte a, b, c geht, als Krümmungskreis für den P(a) ansehen, und lassen deshalb den Satz gelten:

1) *Wenn eine Kreislinie mit einer C(A) drei Folgepunkte (s. 12.) gemein hat, so ist er der Krümmungskreis der C(A).*

Da jede Kreislinie mit einer anderen zusammenfällt, wenn sie irgend drei Punkte, also auch drei Folgepunkte, mit ihr gemein hat, so folgt:

2) *Der Krümmungskreis eines Kreises in irgend einem Punkte seiner Peripherie ist der Kreis selbst.*

Man nennt den Mittelpunkt des Krümmungskreises den *Krümmungsmittelpunkt*, seinen Halmesser den *Krümmungshalbmesser*, seine Ebene die *Krümmungsebene*, seinen durch den Berührungspunkt (a) gehenden Radius (s. 11. Anm.) die *Hauptnormale* der C(A) im P(a); ferner *sagt man die C(A) ist im P(a) um so mehr gekrümmt, je kleiner in diesem Punkte der Krümmungshalbmesser ist.*

27. Jede Hauptnormale wird von ihrem Fußpunkte a in zwei Theile getheilt, von denen in der Regel einer den Krümmungsmittelpunkt enthält, der andere nicht. Man sagt nun von allen Punkten dieser Hauptnormale, die mit dem Krümmungsmittelpunkt auf *einer* Seite von a sich befinden, sie liegen auf der hohlen (konkaven), von der anderen auf der erhabenen (konvexen) Seite der Curve. Wenn wir aber sagten, *in der Regel*, so thaten wir es in Rücksicht darauf, daß der Krümmungshalbmesser möglicher Weise unendlich groß oder unendlich klein werden kann, d. h. daß der Krümmungsmittelpunkt gar nicht existirt, oder mit dem P(a) der C(A) zusammenfällt; in diesen beiden Ausnahmsfällen ist für den P(a) eine konvexe und konkave Seite der C nicht zu unterscheiden.

28. Liegen die beiden auf den P(a) einer C(A) folgenden Fig. 6. b.
Punkte b und c in einer Geraden, so wird der Krümmungskreis von a in eine Gerade übergehen und daher dem P(a) *kein* Krümmungsmittelpunkt entsprechen, oder, was dasselbe ist, der Krümmungshalbmesser für diesen Punkt ist unendlich groß, die C ist in der Nähe dieses Punktes gerade (flach, ungekrümmt); wir wollen daher einen solchen Punkt einen *Flachpunkt* nennen.

Die meisten Flachpunkte, welche vorkommen, haben noch das Eigenthümliche, daß (wie in Fig. b.) die beiden in a zusammenstoßenden Curventheile, in der Nähe von a wenigstens, auf verschiedenen Seiten der Tg und auf verschiedenen Seiten der N dieses Punktes liegen. Wir wollen einen solchen Punkt einen Wellenpunkt nennen. Daß ein Wellenpunkt immer ein Flachpunkt ist, d. h. einen unendlich großen Krümmungshalbmesser hat, läßt sich auf folgendem Wege leicht erkennen. Denn wir können hier immer durch a eine Gerade legen, welche die C (A) in noch zwei Punkten b und c schneidet; drehen wir nun diese Gerade um a, bis b zu einem Nachbarpunkt von a wird, so ist auch c unendlich nahe an a gerückt, und zum zweiten Nachbarpunkt von a geworden. Hier liegen also die drei Folgepunkte b, a, c in einer Geraden, folglich geht der durch b, a und c zu legende Krümmungskreis in eine Gerade über.

Fig. 6. 29. Es kann noch der Ausnahmsfall vorkommen, daß die dem P (a) zunächst liegenden Curvenpunkte auf einer Seite der N des P (a) liegen, wie in den Figuren c, d und e, welche sich dadurch unterscheiden, daß in der Fig. c die beiden im P (a) zusammenstoßenden Curvenstücke auf verschiedenen, in Fig. d hingegen auf einer Seite der Tg liegen, in Fig. e aber, vom P (a) nur ein Curvenstück ausgeht. Wir nennen jeden solchen Punkt, dessen Nachbarpunkte auf einer Seite der Normale liegen (in den drei möglichen Fällen der Figuren c, d, e) einen Grath (Wendepunkt, Rückkehrpunkt). Es ist nun leicht einzusehen, daß durch den P (a) in den Figuren c u. d zugleich der Fall geboten ist, in welchem der Krümmungsmittelpunkt mit dem P (a) zumsammenfällt. Denn denkt man sich die beiden Nachbarpunkte (b und c) von a (die in Fig. c und d auf den beiden in a zusammenstoßenden Curvenstücken liegen, während in Fig. e der P (a) nur einen Nachbarpunkt hat), und sucht den Mittelpunkt der durch a, b und c gehenden Kreislinie, so wird man leicht einsehen, daß dieser Mittelpunkt unendlich nahe an a fallen muß, daß also der Krümmungshalbmesser von a unendlich klein ist.

Anm. Wenn man in der Fig. a zu beiden Seiten der Tg Parallele zu dieser zieht, die ihr sehr nahe liegen, so wird die eine zwei Punkte, die andere keinen Punkt mit der C (A) gemein haben; dreht man aber B um eine Anzahl Grade, so werden zu

beiden Seiten von B Parallele gezogen werden können, die mit der C (A) Punkte gemein haben. Eine Gerade, welche die Grenze bildet zwischen den mit ihr gezogenen Parallelen, die mit einer C (A) Punkte gemein haben, oder nicht, ist also in der Regel eine Tg der C (A). Dagegen bilden in Fig. b die Tg B keine solche Grenze, während in den Figuren c), d) und e) die G (B) auch noch dann eine solche Grenze bildet, wenn man sie um den P (a) gedreht hat. Es geht demnach daraus der Satz hervor:

Wenn eine Gerade B, die mit einer C (A) einen P (a) gemein hat, die Grenze ist zwischen den zu B gezogenen Parallelen, welche mit der C (A) Punkte gemein haben oder nicht, so ist entweder die G (B) eine Tg der C (A) im P (a) oder es ist der P (a) ein Grath, niemals aber kann der P (a) ein Wellenpunkt sein.

30. Sind a und b, b und c, c und d u. s. f. Nachbarpunkte einer ebenen C (A) und halbiren wir die Elemente ab, bc, cd ꝛc. nacheinander durch die Geraden B, C, D ꝛc., welche auf ihnen beziehungsweise senkrecht stehen, und in der Ebene der C (A) liegen, so schneiden sich in der Regel B und C in einem P (m), C und D in einem P (n) ꝛc., und es ist der P (m) der Mittelpunkt für den Kreis abc, n der für abd ꝛc. Da aber $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$ ꝛc. Elemente der C (A) sind, so sind die Punkte m, n ꝛc. die aufeinanderfolgenden Krümmungsmittelpunkte der C (A), die selbst wieder eine Curve (M) bilden. Zugleich sind aber auch aus demselben Grunde die Geraden B, C, D ꝛc. die aufeinanderfolgenden Normalen der C (A), daher die Curve M die Umhüllungscurve (23) dieser Normalen, und folglich die Normalen B, C, D ꝛc. zugleich Tangenten der Curve M. Hieraus folgt folgender Satz:

Die Krümmungsmittelpunkte einer ebenen C (A) bilden in der Regel eine Curve M, die zugleich die Umhüllungscurve der Normalen der C (A) ist; es sind daher diese Normalen zugleich Tangenten der C (M). Da man von zwei Curven, wenn die Normalen der ersten C Tangenten zur zweiten sind, die erste die Evolvente der zweiten, und die zweite die Evolute der ersten nennt, so ist die C (M) die Evolute der C (A) und die C (A) die Evolvente der C (M).

31. Hat eine C (A), deren Evolute B heißen mag, einen Grath a, in welchem die Krümmung der C (A) = o ist, so gehört der P (a) auch der Evolute B an. Hat die C (A) einen Flachpunkt (28), so muß die N dieses Punktes die Evolvente B in unendlicher Entfernung berühren, also eine Asymptote der C (B) sein (s. 13).

32. Sind ab, bc, cd drei aufeinanderfolgende Elemente einer unebenen Curve, so liegen ab und bc in einer Krümmungsebene, bc und cd in einer zweiten, die von der ersten sich so wenig unterscheidet, daß wir sie mit ihr als zusammenfallend ansehen können. Genau genommen sind es aber zwei Ebenen, die einen unendlich kleinen Winkel bilden; man nennt diesen Winkel den **Windungswinkel** der Curve und daher solche Curven **gewundene Curven**. Bei ebenen Curven, fallen wie wir schon oben gesehen alle Krümmungsebenen zusammen und es giebt daher bei ihnen keine Windung, oder ihre Windungswinkel sind = o.

33. Hat eine Curve die Eigenschaft, daß zwei beliebige, aber gleichlange Stücke derselben kongruent sind, so **muß sie in allen Punkten gleiche Krümmung und gleiche Windung haben**. Denn legt man auf ein Stück, das aus 3 aufeinanderfolgenden Elementen besteht, ein beliebig zweites von derselben Länge, so daß es das erste deckt, so decken auch die zwei aufeinanderfolgenden Krümmungsebenen des zweiten Stückes diejenigen des ersten, und es ist daher der Windungswinkel des zweiten Stückes (und da dies ein beliebiges war, jeder Windungswinkel) dem des ersten gleich. Nimmt man ebenso Stücke von 2 Elementen, so läßt sich damit erweisen, daß alle Punkte der Curve **dieselbe** Krümmung haben.

34. Hat eine ebene C die Eigenschaft, daß ihre Stücke von gleicher Länge kongruent sind, und die C daher überall gleiche Krümmung hat, so ist sie eine Kreislinie. Denn sind A, B, C ꝛc. aufeinanderfolgende Normalen der Punkte a, b, c ꝛc., so schneiden sich A und B in einem Krümmungsmittelpunkte m der Curve. Würde B von C in einem anderen Punkte als m, z. B. im Punke n, geschnitten, so wäre bm der Krümmungshalbmesser des Elements ab, und bn der von bc. Da aber alle Krümmungshalbmesser gleich sein sollen, so müssen sich auch B und C im m, also auch aus demselben Grunde C und D in m schneiden u. s. w.

Es fallen also hier alle Krümmungsmittel zusammen in den Punkt m, und da dieser Punkt demnach von allen Punkten der Curve gleichweit entfernt ist, so sieht man, daß die Curve ein Kreis ist. Zugleich erhellt daraus, daß in diesem Falle die Evolute ein einziger Punkt ist. Wir haben also den Satz:

Wenn eine ebene Curve in allen ihren Punkten gleich gekrümmt ist, so ist sie eine Kreislinie, und ihre Evolute ist ein Punkt.

35. Obgleich, wie wir gesehen haben, mit Ausnahme der Kreislinie, jede ebene Curve in ihren verschiedenen Punkten verschiedene Krümmungshalbmesser haben und es demnach genau genommen keinen Kreisbogen geben kann, der mit einem Curvenbogen ab zusammenfällt, so wird es doch, wenn der Winkel, den die in a und b errichteten Normalen bilden, nur wenige Grade hat, stets einen Kreisbogen geben, der so nahe mit dem Bogen ab zusammenfällt, daß sie das Auge nicht unterscheiden kann, und dies wird um so mehr der Fall sein, als die gezeichneten Linien keine mathematischen sind, sondern immer eine bestimmte Breite haben. Wir werden daher ein brauchbares Resultat erhalten, wenn wir eine zu zeichnende ebene Curve aus lauter Kreisbögen ab, bc, cd ꝛc. zusammensetzen, die eine geringe Anzahl Grade haben. Betrachten wir aber ab als Kreisbogen, und ist m sein Mittelpunkt, so sind seine Radien am und bm seine Normalen in den Punkten a, b und, da der Kreisbogen ab als gleichbedeutend mit dem Curvenbogen ab angesehen wird, so sind am und bm zugleich Normalen der Curve. Man erhält demnach den Punkt m, wenn man in den Punkten a, b, die Normalen A, B der Curve zieht, und ihren Schnittpunkt sucht. Hat man aber so den Punkt m gefunden, so ist er nur dann brauchbar, wenn $\overline{ma} = \overline{mb}$ ist, und dies ist der Fall, wenn man $\overset{\frown}{ab}$ nicht zu groß nimmt. Wäre aber $\overline{ma}$ nicht gleich $\overline{mb}$, so müßte man zwischen a und b noch einen Punkt o der Curve aufsuchen und einen Kreisbogen ao und einen ob zeichnen. Würde auch dieser Punkt nicht ausreichen, so müßte man wieder einen dazwischen annehmen u. s. w.

36. Wir beschließen diesen §, indem wir angeben, wie von einer auf die eben angeführte Art gezeichneten Curve Tangenten, Normalen und Krümmungskreise gesucht werden.

1) Da die Bögen ab, bc, cd ꝛc. Kreisbögen sind, so haben alle Punkte des Bogens ab den Mittelpunkt des Bogens ab, alle des Bogen bc den des Bogens bc ꝛc. zum Krümmungsmittelpunkte.

2) Jede Normale oder Tangente an der so gezeichneten Curve ist zugleich Normale oder Tangente eines der gezeichneten Kreisbögen. Hat man daher zu zeichnen

a) die Tangente oder Normale für einen Punkt o der Curve, so ist die Verbindungslinie dieses Punktes mit demjenigen Mittelpunkte des Kreisbogens, in welchem der P (o) liegt, die gesuchte Normale und die in o zu dieser Normale errichtete Senkrechte die verlangte Tangente;

b) eine Tangente parallel zu einer Geraden A oder durch einen Punkt o außerhalb der Curve, so legt man sein Lineal so an die Curve, daß es dieselbe berührt (was das Auge ziemlich genau sieht) und je nach der gegebenen Aufgabe || A ist, oder durch o geht. Dadurch erfährt man, welcher Bogen von der gesuchten Tangente berührt wird. Man hat dann nur die Aufgabe zu lösen: An den Kreisbogen eine Tangente zu legen, welche || A ist oder durch o geht (die Lösung dieser Aufgabe, so wie die Aufsuchung des Berührungspunktes der Tangente, ist aber aus der Elementar-Geometrie bekannt);

c) eine Normale, die parallel einer Geraden A ist oder durch einen Punkt o geht, so sucht man, welcher von den Kreisbögen (aus denen die Curve zusammengesetzt ist) von der Geraden, die durch seinen Mittelpunkt geht, und, je nach der gegebenen Aufgabe, entweder || A ist oder durch o geht, geschnitten wird, diese Gerade ist dann die verlangte Normale.

Anm. Man sieht demnach, daß man gut thut, die Mittelpunkte der Bögen einer Curve nicht zu verlieren, wenn man beabsichtigt, Tangenten oder Normalen an sie zu legen.

§. 5.

Zeichnung und Eigenschaften der für die Anwendung wichtigeren Curven und Construction ihrer Tangenten und Normalen.

37. Indem wir die Construction derjenigen Curven mittheilen, die ein practisches Interesse haben, bietet sich uns eine Gele-

genheit, über die oben (5.) aufgeführten Erzeugungsarten der Curven Beispiele zu geben. Wir beginnen damit, diejenigen drei Curven zu zeichnen, welche den gemeinschaftlichen Namen „Kegelschnittlinien" und „Linien zweiter Ordnung oder des zweiten Grades" führen. (Warum sie den ersteren Namen verdienen, wird sich später herausstellen. Den letzteren Namen führen sie deshalb, weil der algebraische Ausdruck, der die Beziehungen angiebt, in denen die Entfernungen ihrer Punkte von zwei in ihrer Ebene gezogenen Senkrechten zu einander stehen, diese Entfernungen höchstens in der zweiten Potenz enthalten). Diese drei Linien sind ebene Curven; wir nehmen deshalb für jede dieser Curven die Tafeln so an, daß eine davon z. B. die $\mathfrak{T}_1$ mit der Ebene der Curve zusammenfällt; da wir wissen, daß dann der $\mathfrak{R}_2$ eines jeden Punktes in die $\mathfrak{K}_2$ fällt, so begnügen wir uns mit der Construction der $\mathfrak{R}_1$ der Curve, so wie mit der Angabe blos des $\mathfrak{R}_1$ eines jeden Punktes und einer jeden Linie in der Ebene der Curve.

38. Aufg. Es ist gegeben ein Gerade A und ein Punkt a; gesucht eine Curve, deren Punkte in der E (Aa) liegen und von A und a gleichweit abstehen. Fig. 7.

Aufl. Will man einen beliebigen P (b) dieser Curve, die den Namen Parabel führt, finden, so kann man seine Entfernung a von A beliebig annehmen, dann liegt der Punkt b in einer G (B), die || G (A) ist und um α von ihr entfernt ist. Soll der P (b) vom P (a) auch die Entfernung α haben, so muß er in einer aus a mit dem Halbmesser α beschriebenen Kreislinie C liegen; der Punkt, den B und C gemeinschaftlich enthalten, ist dann der P (b). In der Regel schneiden sich B und C in zwei Punkten, die gegen die zu A senkrechte Geraden ab symetrisch liegen. Macht man aber α gleich dem halben Abstand des P (a) von der G (A), so erhält man nur einen Punkt d, der in der Mitte der Geraden $\overline{ac}$ liegt. Nimmt man α kleiner als ad, oder nimmt die Gerade B auf der dem P (a) entgegengesetzten Seite der G (A) an, so erhält man keinen Punkt der Curve. Nimmt man α größer als ad und zeichnet B mit dem P (a) auf einer Seite der G (A), so erhält man immer zwei Punkte der Parabel, da in diesem Falle die G (B) von a eine Entfernung hat, die kleiner ist, als der Halbmesser des entsprechenden

Kreises C. Es kann daher die Parabel zu beiden Seiten der Geraden ac bis in's Unendliche fortgesetzt werden.

Fig. 7. 39. Aus dem eben Gesagten geht hervor, daß die Parabel eine offene symmetrische einfache Curve ist, welche die durch den leitenden Punkt a zur Leitlinie A gezogene Senkrechte zur Achse und den in der Mitte von $\overline{ac}$ liegenden Punkt d zum Scheitel hat (8.) Man nennt den Leitpunkt a ihren Brennpunkt und die Gerade A ihre Leitlinie oder Directrix. Ferner nennt man die Entfernung ad ihres Brennpunktes von ihrem Scheitel ihre Brennweite, die aus einem beliebigen Punkte b der Parabel nach a und nach e (senkrecht zu A) gezogenen Geraden ihre Brennstrahlen, die G ($\overline{fg}$), welche durch a geht, || A ist und die Parabelpunkte f und g zu Grenzen hat, ihren Parameter.

NB. Die einem P (b) der Parabel angehörigen Brennstrahlen sind so zu verstehen, daß sie vom P (b) begrenzt sind und nach einer Richtung in's Unendliche gehen, und zwar soll der eine durch a gehen und der andere die Leitende nicht schneiden.

Fig. 8. 40. Ist wieder b ein Punkt der Parabel und sucht man einen folgenden nahe daran liegenden Punkt c, so darf man nur die Entfernungen ba und bd des Punktes b von den Leitenden A und a um die kleinen und gleichen Stücke be, bf größer machen, und durch e die Gerade B || A, durch f die aus a beschriebene Kreislinie C legen, so ist der Durchschnitt von B und C der gesuchte Punkt c. Ist nun bc und daher auch be, bf, ce und cf unendlich klein, so ist cf ein Element der Kreislinie C und fällt daher mit der in f zu C gezogenen Tangente zusammen. In diesem Falle ist aber die G (bc) die Halbirungslinie des Winkels abd, den die Brennstrahlen des P (b) bilden, und zugleich die Tangente der Curve im P (b). Es folgt daher folgender Satz:

Die Tg einer Parabel in einem P (b) macht mit den Brennstrahlen des P (b) gleiche Winkel, und die N einer Parabel in einem P (b) halbirt die Winkel der Brennstrahlen dieses Punktes.

NB. Wenn wir hier oder irgendwo in der Folge sagen, eine Gerade A macht mit den Geraden, die die Schenkel eines Winkels bilden, und daher im Scheitel ihre eine Grenze haben, gleiche Winkel, so liegen diese Schenkel auf einer Seite der

G (A); wenn wir hingegen sagen, die G (A) halbirt den Winkel, so soll die G (A) zwischen den beiden Schenkeln liegen.

41. Verbindet man a mit d, so ist adb ein gleichschenkliges Dreieck, und es wird daher ad von der Tangente in b senkrecht halbirt. Demnach ist 1) jeder Punkt der Tangente gleichweit entfernt von dem Brennpunkt und dem ihr entsprechenden Punkte (dem P (d)) in der Leitlinie A; 2) steht die Verbindungslinie (ad) des Brennpunktes mit dem entsprechenden Punkt der Leitlinie senkrecht zur Tangente. Zieht man noch durch den Halbirungspunkt g ein Parallele D zu A, so geht diese durch den Scheitel h der Parabel. Zieht man daher durch den Brennpunkt a eine beliebige Gerade die A im P (d) und D im P (g) schneidet und legt durch g eine Senkrechte zu A, so ist der Schnittpunkt b dieser Senkrechten ein Punkt der Parabel und bg die Tangente für den P (b). Fig. 8.

42. Zieht man noch bk ∥ A und erwägt, daß $\overline{bk} = \overline{dl}$ und $\overline{dl} = 2\,\overline{gh}$, folglich $\overline{gh} = \frac{1}{2}\,\overline{bk}$ ist, so geht hieraus noch ein Mittel hervor für den P (b) einer Parabel die Tangente zu finden, wenn außer ihm noch der Scheitel h und die Achse hk der Parabel bekannt sind. Macht man nemlich $hg = \frac{1}{2} bk$, so ist bg die verlangte Tangente. Zieht man noch ga ⊥ bg, so ist a der Brennpunkt. Fig. 8.

43. Die Betrachtung in 41 bietet uns ein Mittel, die Punkte einer Parabel so zu finden, daß zugleich die ihnen entsprechenden Tangenten bekannt sind. Da wir aber mittelst der Tangenten leicht die entsprechenden Normalen zeichnen können, und diese wieder nothwendig sind, um die Curve aus Kreisbögen zusammenzusetzen, so wird sich die aus 41 hervorgehende Construction als sehr zweckmäßig empfehlen. Bei dieser Construction muß jedoch außer der Achse und dem Scheitel auch der Brennpunkt bekannt sein. Wäre dieser nicht gegeben, dafür aber ein Punkt der Parabel bekannt, so würde man zuerst mit Hilfe der in der vorhergehenden Nummer angestellten Betrachtungen den Brennpunkt und dann erst die übrigen Punkte nebst ihren Normalen aufsuchen, und dieselben (nach 35) durch Kreisbögen verbinden. Fig. 9.

Es sei demnach A die Achse, a der Scheitel und b ein Punkt der Parabel. Zieht man durch den Scheitel a die G (B) ⊥ G (A)

und macht man $\overline{ac}$ gleich der halben Entfernung von b nach A, so ist (nach 42) bc die Tangente für b und, wenn cd $\perp$ bc gemacht wird, d der Brennpunkt. Macht man nun $\overline{ae} = \overline{ad}$ und zieht durch e die 𝔊 (C) $\perp$ 𝔊 (A), so ist C die Directrix. Zieht man nun durch den Brennpunkt d eine beliebige Gerade df, die B in f und C in g schneidet, und zeichnet man die Geraden fh und gh beziehungsweise senkrecht zu B und C, so ist ihr Durchschnitt h ein Punkt der Parabel, gh seine Tangente und die in h zu gh errichtete Senkrechte die Normale für den 𝔓 (h). Auf ähnliche Art erhält man den 𝔓 (k) und seine Normale. Sucht man die Punkte l, m, n, in welchen sich je zwei nächstliegende Normalen al, kl, hm, bn schneiden, und zieht die Kreisbögen ak, kh, hb nacheinander aus den Mittelpunkten l, m, n, so kann man die Curve ab als mit der verlangten Parabel übereinstimmend betrachten.

Anm. Wenn man auf diese Art eine Curve aus Kreisbögen zusammensetzen will, so ist es zweckmäßig, die Punkte der Curve so zu suchen, daß die Kreisbögen ohngefähr gleich viel Grade bekommen, und daher um so kürzer ausfallen, je kleiner ihr Halbmesser ist. Daher haben wir die Punkte k, h so gewählt, daß die Bögen ak, kh, hb nacheinander an Länge zunehmen.

Fig. 10. 44. Aufg. Es sind gegeben der Brennpunkt a und die Leitende A einer Parabel; man soll eine Tangente dieser Curve nebst ihrem Berührungspunkte suchen, wenn jene durch einen gegebenen 𝔓 (b) geht.

Aufl. Suchen wir zuerst den dem gesuchten Berührungspunkte entsprechenden Punkt der Leitlinie A, so finden wir diesen Punkt d aus dem Satze (41), daß derselbe von jedem Punkte der Tangente, also auch vom 𝔓 (b) so weit entfernt ist, als der Brennpunkt a. Beschreibt man daher aus b mit dem Halbmesser $\overline{ba}$ eine Kreislinie B, so ist ihr Durchschnitt mit A der verlangte 𝔓 (d). Halbirt man noch $\overline{ad}$ senkrecht, so erhält man die gesuchte Tangente be. Zieht man noch in d die Gerade dc $\perp$ A, so ist ihr Schnittpunkt c mit der Tangente be der gesuchte Berührungspunkt.

Anm. Im vorliegenden Falle schneiden sich A und B in einem zweiten Punkte, der in ähnlicher Art wie d benützt auf eine zweite Tangente führt. Es muß offenbar allemal zwei Schnittpunkte von A und B (und daher zwei Tangenten) geben, wenn

der Halbmesser des Kreises B größer ist, als die Entfernung des P (b) von A; es giebt keine Tangente, wenn jener Halbmesser kleiner ist als diese Entfernung; es giebt eine Tangente, wenn jener Halbmesser dieser Entfernung gleich ist. In letzterem Falle ist dann der Punkt b von a und A gleichweit entfernt, und es ist daher in diesem Falle der P (b) ein Punkt der Parabel.

45. Aufg. Es sind gegeben die Leitlinie A und der Brennpunkt a einer Parabel; gesucht eine Tangente dieser Curve parallel einer gegebenen Geraden B.

Aufl. Suchen wir hier wieder zuerst den der gesuchten Tangente entsprechenden P (d) der Leitlinie A, so finden wir ihn dadurch, daß die Gerade ad zur gesuchten Tangente, also auch zur Geraden B senkrecht steht. Haben wir den P (d), so ist wieder die senkrechte Halbirung von ad die gesuchte Tangente, und der Punkt c, in welchem diese von der in d zu A gezogenen Senkrechten geschnitten wird, der gesuchte Berührungspunkt. Fig. 10.

Anm. Da hier der P (d) der Durchschnitt zweier Geraden (der G (ad) und der G (A)) ist, so kann es nie mehr als eine Tangente geben. Dagegen wird keine Tangente gefunden werden können, wenn diese Geraden parallel werden, d. h. wenn B parallel zur Achse der Parabel ist.

46. Aufg. Es sind gegeben zwei Punkte a, b; gesucht eine Curve, welche die Eigenschaft hat, daß für jeden Punkt c derselben die Entfernungen $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ dieselbe Summe geben. Fig. 11.

Aufl. Nimmt man auf der Geraden ab die Punkte d und e so an, daß $\overline{de} = \overline{ac} + \overline{cb}$, und daß der Mittelpunkt f von $\overline{ab}$ zugleich der von $\overline{de}$ ist, so findet man einen beliebigen P (c) der gesuchten Curve, wenn man $\overline{de}$ durch einen P (g) in zwei Theile theilt, und aus den Punkten a und b mit den Halbmessern $\overline{dg}$ und $\overline{eg}$ Kreisbögen A, B beschreibt; der P (c), in welchem sich diese Bögen schneiden, ist ein Punkt der verlangten Curve. Da unsere Kreisbögen sich in noch einem Punkte, nemlich in h, schneiden, so erhalten wir durch diese Construction zwei Punkte, die gegen die Gerade de symmetrisch liegen. Wiederholt man diese Construction mit denselben Halbmessern, beschreibt aber aus a den kleinern und aus b den größeren Kreis, so erhält man wieder zwei Punkte, die gegen die (aus f senkrecht zu de gezogene) Gerade fk mit den Punkten c, h symmetrisch liegen. Nimmt man

$\overline{ad}$ zum kleinen $\overline{ae}$ zum größeren Halbmesser, so berühren sich die Kreise, und man erhält die Punkte d und e. Nimmt man den kleinen Halbmesser kleiner als $\overline{ad}$, und daher den größeren größer als $\overline{ae}$, so haben die beiden Kreise **keinen** Punkt gemein. Nimmt man endlich die beiden Halbmesser gleich also jeden halb so groß als $\overline{de}$, so erhält man die Punkte k und l in der Geraden fk.

Fig. 11. 47. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß die gesuchte Curve, die den Namen **Ellipse** führt, eine **geschlossene** Curve ist, daß sie zwei aufeinander senkrechte Achsen (de, lk) und also auch einen Mittelpunkt (f) hat, und auf jeder dieser Achsen unter allen Punkten der Curve zwei Punkte liegen, die unter allen Punkten der Curve von der anderen Achse am weitesten entfernt sind. Man nennt diese Achsenpunkte der Ellipse ihre Scheitel, die Leitpunkte a, b ihre **Brennpunkte**, die Achse, auf welcher die Brennpunkte liegen, die **große**, die andere die **kleine Achse** der Ellipse, und die Verbindungslinien eines Punktes der Curve mit den Brennpunkten seine **Brennstrahlen**. Ferner nennt man die Entfernung der Scheitel d und e die große, der Scheitel k und l die **kleine Achsenlänge**, $\overline{fe}$ die **große**, fk die **kleine Halbachse***) und ab die Exzentrizität der Ellipse. Endlich sieht man, daß

1) **die große Achsenlänge gleich der Brennstrahlen Summe eines jeden Ellipsenpunktes ist**, und
2) **die große, die kleine Halbachse und die halbe Exzentricität die Seiten eines rechtwinkeligen Dreieckes (afk) sind, in welchem die große Halbtachse die Hypotenuse bildet.**

NB. Auch hier und bei der folgenden C (Hyperbel) ist unter dem Brennstrahl eines P (b) eine von diesem Punkt begrenzte Gerade zu verstehen, die von da aus nur nach **einer** Richtung fortgeht, und zwar nach derjenigen, die den Brennpunkt enthält. Ist aber von der **Länge** des Brennstrahls die Rede, so ist der Punkt der Ellipse die eine der Brennpunkt, aber die andere Grenze desselben.

Fig. 12. 48. Sind a und b die Brennpunkte und c ein Punkt einer Ellipse, so findet man einen P (d) der Ellipse, der von c nicht

---

*) Da durch das „Halb" schon ausgedrückt ist, daß eine Länge bezeichnet werden soll, so braucht man das Wort Länge nicht hinzufügen.

weit entfernt ist, wenn man den einen Brennstrahl ($\overline{ac}$) um ein kleines Stück $\overline{ce}$ länger und den anderen ($\overline{bc}$) um ebensoviel ($\overline{cf}$) kürzer macht, und nun $\overline{ae}$ und $\overline{bf}$ als Brennstrahlen des gesuchten Punktes d betrachtet; wo die aus den Mittelpunkten a, b beschriebenen Bögen df und de sich schneiden, ist der Punkt d. Soll nun der Punkt d unendlich nahe am P (c) liegen, so können wir die Bögen $\overline{ed}$, $\overline{ef}$ als Gerade betrachten, die auf den Halbmessern ae, bf resp. senkrecht stehen, und die Figur cfde ist dann ein Viereck, dessen Diagonale cd seinen Winkel bei c halbirt. Da aber unter der Voraussetzung, daß d unendlich nahe an c liegt, die Gerade cd die Tangente der Ellipse im P (c) ist, so erhalten wir folgende Sätze:

1) die Tangente einer Ellipse in einem P (c) derselben bildet mit den Brennstrahlen des P (c) gleiche Winkel und

2) die Normale der Ellipse im P (c) halbirt den Winkel der dem P (c) entsprechenden Brennstrahlen.

Anm. Unsere Entwickelung paßt auf alle Punkte der Ellipse mit Ausnahme der in ihrer großen Achse liegenden Scheitel. Da aber bei der Aufsuchung eines Scheitels die mit seinen Brennstrahlen aus den Brennpunkten beschriebenen Kreise sich berühren, diese also zwei unendlich nahe Punkte mit der Ellipse gemein haben, so folgt, daß jeder dieser Kreise die Ellipse im Scheitel berührt, und demnach die Normale des Scheitels in die große Achse fällt und seine Tangente auf dieser Achse senkrecht steht. Es gelten also die obigen zwei Sätze auch für den Scheitel. Diese Anmerkung gilt in ähnlicher Weise für die Parabel und die folgende E (Hyperbel).

49. Sind a, b die Brennpunkte, c ein Punkt einer Ellipse und ce ihre Tg im P (c), und macht man $\overline{cb} = \overline{cd}$, so wird $\overline{bd}$ von der Tangente ce senkrecht halbirt, indem diese Tangente den Winkel an der Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks bcd in zwei gleiche Theile theilt. Da aber nun $\overline{ad} = \overline{ac} + \overline{cb}$, also gleich der großen Achsenlänge ist (47. Satz 1)), so wird der Punkt d in einer Kreislinie A liegen, die aus a mit einem Halbmesser gleich der großen Achsenlänge beschrieben ist. Ferner sind der Punkt d und der Brennpunkt b von jedem Punkt der Tangente Fig. 13.

ce gleichweit entfernt, und ist die Gerade db senkrecht zur Tangente ce. Endlich liegen die Punkte a, c und d in einer Geraden. Nennen wir nun die aus einem Brennpunkt (hier a) mit der großen Achsenlänge beschriebene Kreislinie die Leitlinie (Directrix) und den anderen Brennpunkt (hier b) schlechtweg den Brennpunkt der Ellipse, so sieht man, daß hier, wie bei der Parabel, jeder Punkt c der Ellipse von der Directrix und dem Brennpunkt gleichweit entfernt ist. Wir werden daher bei der Aufsuchung der Tangente an einer Ellipse, wie bei der Parabel verfahren können, indem wir nemlich zuerst den der Tangente entsprechenden Punkt (d) der Directrix aufsuchen.

Fig. 13. 50. Sind daher die Brennpunkte a, b und die große Achsenlänge einer Ellipse gegeben, und gesucht eine Tangente, die

1) durch einen gegebenen P (e) geht, so beschreibt man aus a mit der großen Achsenlänge eine Kreislinie A (die Directrix) und aus e mit dem Halbmesser $\overline{eb}$ eine Kreislinie B; der Schnittpunkt d dieser Kreislinien ist der der gesuchten Tangente entsprechende Punkt. Halbirt man nnn $\overline{bd}$ senkrecht durch die Gerade E, so ist dies die gesuchte Tangente und der Punkt c, in welchem diese von der Radius da geschnitten wird, ist ihr Berührungspunkt;

2) parallel einer Geraden C, so zieht man durch b die G (bd) $\perp$ G (C) und der Punkt d, in welchem sie die Directrix A schneidet, entspricht der gesuchten Tangente. Halbirt man daher $\overline{bd}$ senkrecht, so erhält man die Tangente E und der Punkt c, wo diese vom Radius ad geschnitten wird, ist ihr Berührungspunkt.

Anm. Da die Kreislinien B und A sich hier in zwei Punkten schneiden, so giebt es durch den gegebenen P (e) zwei Tangenten. Es könnte aber auch dieser Punkt so liegen, daß B und A sich nicht schnitten, und daher keine Tangente, oder so, daß B und A sich berührten und nur eine Tangente möglich wäre. Im letzten Falle müßte der Punkt e in der Kreisfläche A liegen (da auch b darin liegt), und daher $\overline{ae} + \overline{ed} = \overline{ae} + \overline{eb} = \overline{ad}$, und demnach e ein Punkt der Ellipse sein. Da ferner die Gerade bd stets, wie in unserer Figur, durch den innerhalb des Kreises A liegenden Punkt b geht, so schneidet sie die Kreislinie A

immer in zwei Punkten, und es giebt daher parallel einer Geraden stets zwei Tangenten an einer Ellipse.

51. Aus der Gleichung der Ellipse (s. Anh. 2.) ergiebt sich noch eine Construction dieser Curve. Sind nemlich a und b die Scheitel in der großen, c und d die in der kleinen Achse, und ist e der Mittelpunkt und f ein beliebiger Punkt der Ellipse, so ist, wenn fg $\perp$ ab gezogen wird, $\overline{fg} = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - \overline{eg}^2}$. Fig. 14.

Durchschneidet man nun die Gerade fg im Punkte h durch eine aus e mit dem Halbmesser α beschriebene Kreislinie, so ist $gh = \sqrt{\alpha^2 - \overline{eg}^2}$. Macht man ferner $\overline{ei} = \beta$, und zieht if || ab, so ist $\overline{ei} : \overline{fg} = \overline{eh} : hg$ oder $\beta : \overline{fg} = \alpha : \sqrt{\alpha^2 - \overline{eg}^2}$, oder $fg = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - \overline{eg}^2}$; es trifft demnach die G (if) die hg in dem P (f) der Ellipse.

Hieraus ergiebt sich folgende Construction: Man beschreibt aus dem Mittelpunkte e der Ellipse die Kreise A und B mit ihrer großen und kleinen Halbachse; zieht man nun durch e eine beliebige Gerade eh, die B in i und A in h schneidet, sodann if || ab und hf || cd, so ist f ein Punkt der Ellipse.

Anm. Es ist leicht einzusehen, daß, wenn $\overline{ab}$ und f gegeben sind, sich daraus der Kreis A, dann h und daraus i, folglich auch der Kreis B und damit die Ellipse zeichnen läßt.

52. Zieht man noch fk || eh, und ist k der Schnittpunkt von fk mit der großen und l der mit der kleinen Achse, so ist leicht einzusehen, daß $\overline{fh} = \overline{ih} = \alpha$ und $\overline{fl} = \overline{ei} = \beta$ und daher $kl = \alpha - \beta$. Zieht man dagegen mn so, daß es durch f geht, und ab in m und ed in n so schneidet, und daß die Dreiecke lfm und kfn gleichschenklig werden, so wird $\overline{nf} = \alpha$, $\overline{fm} = \beta$ und $mn = \alpha + \beta$. Fig. 14.

Hieraus läßt sich leicht einsehen, daß man auf folgenden Wegen (die zugleich auf ein Instrument zur Construction einer Ellipse führen) eine Ellipse construiren kann, wenn ihre Scheitel a und b, c und d bekannt sind.

1) Man trägt auf eine Gerade von einem Punkt f aus in einer Richtung die Längen fl und fk, resp. gleich den Halbach-

sen, auf, und bewegt die Gerade in der Ellipsenebene so, daß der Endpunkt (k) der **großen** Halbachse auf der kleinen und der Endpunkt (l) der kleinen Halbachse auf der großen fortgeht.

2) Man trägt auf eine Gerade von einem Punkte f aus in verschiedenen Richtungen die Längen m und $\overline{fn}$ gleich den Halbachsen auf, und bewegt die Gerade in der Ellipsenebene so, daß wieder der Endpunkt m der kleinen Halbachse auf der großen und der Endpunkt n der großen Halbachse auf der kleinen Achse fortgeht. In beiden Fällen beschreibt der $\mathfrak{P}$ (f) die Ellipse.

Fig. 15. 53. Es sei eine Kreislinie A, deren Ebene mit der $\mathfrak{T}_1$ den $\wedge\,\alpha$ bildet, gegeben, und ihr $\mathfrak{R}_1$ gesucht. Nehmen wir die $\mathfrak{T}_2$ so an, daß sie auf der Ebene der Kreislinie senkrecht, so ist der $\mathfrak{R}_2$ von A die Gerade A_2, welche mit $\mathfrak{K}_2$ den Winkel α bildet. Ist nun e der Mittelpunkt von A und nimmt man die $\mathfrak{K}_2$ so an, daß sie durch e_2 geht, so liegt der $\mathfrak{P}$ (e) in der $\mathfrak{T}_1$, und diese schneidet daher den Kreis A nach einem Durchmesser ab, dessen $\mathfrak{R}_2$ a_2 ist. Läßt man die $\mathfrak{K}_1$ durch a_1 gehen, so liegt der $\mathfrak{P}$ (a) in der $\mathfrak{T}_2$ und diese schneidet daher die Kreisebene nach cd. Betrachtet man nun die Ebene des Kreises A als $\mathfrak{T}_3$, so bildet diese mit der $\mathfrak{T}_1$ ein $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{K}'$, α); klappt man nun die $\mathfrak{T}_3$ um $\mathfrak{K}'$ um, so ist die Kreislinie A_3 der $\mathfrak{R}_3$ von A. Sucht man den $\mathfrak{R}_1$ (f_1) eines $\mathfrak{P}$ (f), dessen $\mathfrak{R}_3$ f_3 ist, so ist bekanntlich (* 70.) $\overline{f'f_3}$ gleich der Hypotenuse ($a_2\,f_2$), und $\overline{f'f_1}$ gleich der Kathete a_2f_2 eines rechtwinkeligen Dreiecks af_2f_2, in welchem der Winkel $f_2\,a_2f_2 = \wedge\,\alpha$ ist. Da aber für alle Punkte der Kreislinie A der $\wedge\,\alpha$ derselbe ist, so folgt, daß die Proportion $\overline{f'f_1} : \overline{f'f_3} = \overline{c_1e_1} : \overline{c_3e_3}$, oder $\overline{f'f_1} : \sqrt{\overline{e_1f_3}^2 - \overline{e_1f'}^2} = c_1e_1 : c_3e$ oder (wenn $f'f_1 = y$, $e_1f' = x$, $e_1f_3 = \alpha$ und $e_1c_1 = \beta$ setzt) $y : \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \beta : \alpha$ für alle Punkte der Kreislinie gilt. Demnach gehört jeder $\mathfrak{R}_1$ eines Punktes von A einer in der $\mathfrak{T}_1$ lieegenden Ellipse an, deren Achsen a_1b_1 und c_1d_1 und deren Halbachsen $\overline{e_1a_1}$ und $\overline{e_1c_1}$ sind. Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Wenn eine Kreislinie weder parallel noch senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ ist, so ist ihr $\mathfrak{R}_1$ eine Ellipse, deren Mittelpunkt der $\mathfrak{R}_1$ des Kreismittelpunktes und deren große Achse parallel zur $\mathfrak{S}_1$ der Kreisebene ist. Ferner ist die große Halbachse der Ellipse gleich dem Halbmesser des Kreises und die kleine

Halbachse derselben gleich der Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Hypotenuse gleich dem Halbmesser des Kreises ist, und mit dieser Kathete den Winkel bildet, den die Ebene des Kreises mit der T_1 einschließt.

54. Aus der vorigen Nr. ergiebt sich ein einfaches Mittel an eine Ellipse, die nach 51 construirt ist, eine Tangente zu legen, wenn der Berührungspunkt f gegeben ist. Man betrachtet nemlich die Ellipse als R_1 einer Kreislinie A, deren R_3 die Kreislinie A_3 ist, und die gesuchte Tangente als R_1 einer Tangente von A für den Punkt f. Dann ist $f_3\ g_3$, welches A_3 in f_3 berührt, der R_3 dieser Tangente und demnach $f_1 g_1$ ihr R_1, also die gesuchte Tangente der Ellipse. Fig. 15.

55. Aus dem Umstande, daß sich jede Ellipse als Riß einer Kreislinie betrachten läßt, kann folgende Eigenschaft derselben abgeleitet werden. Betrachtet man eine Ellipse A_1 als R_1 eines Kreises A, und zieht man in letzterem parallele Sehnen, so liegen ihre Mittelpunkte in einem Durchmesser B des Kreises. Da nun die R_1 jener Sehnen parallele Sehnen der Ellipse A_1 geben, und die Risse der Mittelpunkte der Kreissehnen in den Mitten der Ellipsensehnen liegen, so folgt der Satz:

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Ellipse liegen in einem Durchmesser dieser Ellipse. Man nennt diesen Durchmesser zu jeder dieser parallelen Sehnen zugeordnet (konjugirt).

Anm. Es wirft sich einem hier leicht die Frage auf, ob dieser Satz nicht auch für die Parabel und Hyperbel wahr ist? Sucht man sich auf analytischem Wege davon zu überzeugen, so findet man in der That, daß er für alle Linien zweiter Ordnung gilt, und daher folgendermaßen lautet:

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Linie zweiter Ordnung liegen in einer geraden Linie. Diese geht bei der Ellipse und Hyperbel durch ihren Mittelpunkt, und läuft bei der Parabel mit ihrer Achse parallel.

55. Aufg. Es sind gegeben die Punkte a und b; gesucht eine Curve, welche die Eigenschaft hat, daß für jeden Punkt c derselben $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ dieselbe Differenz haben. Fig. 16.

Aufl. Nimmt man auf der Geraden ab die Punkte d und e so an, daß $\overline{ac} - \overline{bc} = \overline{de}$, und daß der Mittelpunkt f von $\overline{de}$ zugleich der von $\overline{ab}$ ist, so findet man einen P (c) der gesuchten Curve, wenn man auf ab einen P (g) annimmt und mit $\overline{dg}$, $\overline{eg}$ aus den Punkten a, b Kreisbögen A, B beschreibt, deren Schnittpunkt c der Curve angehört; denn es ist $\overline{ac} - \overline{bc} = \overline{dg} - \overline{eg} = \overline{de}$. Da unsere Kreisbögen sich in noch einem Punkte (h) schneiden, so erhalten wir hier zwei Curvenpunkte, die gegen die Gerade ab symmetrisch liegen. Wiederholt man diese Construction mit denselben Halbmessern und Mittelpunkten, nur daß man in a mit dem kleinereu und in b mit dem größeren Halbmesser einsetzt, so erhält man wieder zwei Curvenpunkte, die mit den Punkten c und h gegen die (durch f senkrecht zu ab gezogene) G (C) beziehungsweise symmetrisch liegen. Nimmt man ae zum kleineren und $\overline{be}$ zum größeren Halbmesser, so berühren sich die Kreisbögen und man erhält als Curvenpunkt d oder e. Nimmt man den größeren Halbmesser kleiner als $\overline{db}$ oder den kleineren kleiner als $\overline{be}$, so haben die Kreisbögen keinen Punkt gemein, und man erhält keinen Curvenpunkt. Nimmt man aber den P (g) rechts von b an (in welchem Falle die Halbmesser der Kreisbögen A und B beziehlich größer sind als $\overline{db}$ und $\overline{be}$), so werden sich die Kreisbögen A und B stets schneiden (wie weit auch g von b entfernt genommen wird) da in diesem Falle die Summe ihrer Halbmesser größer ist, als die Entfernung ihrer Mittelpunkte.

Fig. 16. 56. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß die gesuchte Curve, die den Namen Hyperbel führt, eine Zwillingscurve (8) ist, deren beide Theile offen sind; daß sie zwei aufeinander senkrechte Achsen, und zwar eine reele (de) und eine immaginäre (C), und einen Mittelpunkt f hat. Die in der reelen Achse liegenden Punkte d und e der Hyperbel nennt man ihre Scheitel, die in jener Achse liegenden Punkte a und b ihre Brennpunkte. Die Entfernung der Scheitel (d und e) nennt man die reele Achsenlänge, ihre Hälfte, oder die Entfernung des Mittelpunktes von einem Brennpunkte, die reele Halbachse; die Entfernung der Brennpunkte die Exzentrizität; die von einem Curvenpunkte nach einem Brennpunkte geführte Gerade Brennstrahl. Endlich erhalten wir den Satz:

Die reele Achsenlänge einer Hyperbel ist gleich der Brennstrahlendifferenz eines beliebigen Punktes in ihr (s. 47 NB.)

57. Sind a und b die Brennpunkte und c ein Punkt der Hyperbel, so findet man einen folgenden Punkt d dieser Curve, der von c nicht weit entfernt ist, wenn man beide Brennstrahlen ($\overline{ac}$ und $\overline{bc}$) um kleine und gleiche Stücke ($\overline{ce}$ und $\overline{cf}$) länger macht, und nun aus a und b mit den Halbmessern $\overline{ae}$ und $\overline{bf}$ Bögen beschreibt, deren Schnitt der verlangte Punkt d ist. Läßt man nun den P (d) unendlich nahe an c liegen, so werden sich aus ähnlichen Gründen wie bei der Ellipse folgende Sätze ergeben:

1) Die Tangente einer Hyperbel im P (c) halbirt den Winkel der Brennstrahlen dieses Punktes;
2) die Normale der Hyperbel im P (c) bildet mit den Brennstrahlen dieses Punktes gleiche Winkel.

Anm. Aus ähnlichen Gründen wie bei der Ellipse gelten die eben aufgeführten Sätze auch für die Scheitel, nur daß auch hier in diesem Falle die Brennpunkte in der Normale liegen.

58. Durch eine ähnliche Entwickelung, wie bei der Ellipse (56) Fig. 17.
findet man die Tangente einer Hyperbel, wenn die Brennpunkte a und b und die reele Achsenlänge gegeben sind

1) durch einen P (e), indem man mit der reelen Achsenlänge aus dem einen Brennpunkt (hier a) eine Kreislinie A (die Directrix) beschreibt und den Punkt d aufsucht, in welchem diese von der aus e mit dem Halbmesser $\overline{eb}$ beschriebenen Kreislinie B geschnitten wird. Halbirt man wieder $\overline{bd}$ durch die dazu Senkrechte D, so ist diese Gerade die verlangte Tangente, und der Punkt c, in welchem sie vom Radius da der Directrix geschnitten wird, ist der Berührungspunkt der Tangente;

2) parallel einer Geraden C, wenn man durch b eine Gerade bd senkrecht zu C zeichnet, und $\overline{bd}$ senkrecht halbirt, so ist diese Halbirungslinie D die gesuchte Tangente, und der Punkt c, in welchem sie von dem Radius ad der Leitlinie geschnitten wird, der Berührungspunkt.

Anm. Auch hier können, wenn die Tangente durch den Punkt e gehen soll, ebenso wie bei der Ellipse die Fälle vorkommen, daß es zwei Tangenten oder keine Tangente oder eine giebt, und wird im letzteren Falle der P (e) der Hyperbel selbst angehören. Aber

auch, wenn die Tangente parallel zur Geraden C sein soll, können uns die drei Fälle begegnen, indem hier der Punkt b außerhalb des Kreises A liegt, und demnach die Gerade bd nicht immer wie in unser Figur die Kreislinie A (in zwei Punkten) schneidet, sondern dieselbe kann auch keinen Punkt mit A gemein haben, in welchem Falle eine Tg || C unmöglich ist. Es kann aber auch der besondere Fall eintreten, daß die G (bd) die Leitlinie A berührt, und demnach nur eine Tg || C möglich ist. Diesen Fall wollen wir in der folgenden Nr. näher betrachten.

Fig. 18. 59. Nehmen wir an, die Gerade B, mit der die an eine Hyperbel (deren Leitlinie A und deren Brennpunkt b ist) zu legende Tangente parallel sein soll, sei so beschaffen, daß die aus b zu ihr gezogene Senkrechte bc die Leitlinie A in c berührt, so giebt es natürlich nur eine Tangente. Suchen wir diese, indem wir bc senkrecht halbiren, so muß diese Halbirungslinie de durch den Mittelpunkt d der Hyperbel gehen (denn es ist ad : db = ce : eb). Suchen wir den Berührungspunkt unserer Tangente, indem wir ihren Schnitt mit der Geraden ac suchen, so finden wir, daß ac || de ist, und daher die Tangente de keinen Berührungspunkt, oder, wenn wir so sagen wollen, ihren Berührungspunkt in unendlicher Entfernung hat. Sie wird demnach die Hyperbel nicht wirklich berühren, sondern diese wird ihr immer näher kommen, ohne sie je zu erreichen. Man nennt, wie wir schon früher gesagt haben, eine solche Tangente, deren Berührungspunkt in unendlicher Entfernung liegt, eine Asymptote der Curve, und die Curve, die eine Asymptote hat, eine asymptotische Curve. Betrachten wir noch das rechtwinkelige Dreieck bde, so ist $\overline{bd}$ die halbe Exzentrizität, $\overline{ed}$ die reele Halbachse; die Seite $\overline{be}$ nennt man die immaginäre Halbachse. Ferner ist der Winkel, den de (die reele Halbachse) mit der Hypotenuse $\overline{db}$ einschließt, gleich dem Winkel, den die reele Achse mit der Asymptote bildet, und der Winkel der Seite $\overline{eb}$ (der immaginären Halbachse) mit db gleich dem Winkel, den die immaginäre Achse mit der Asymptote bildet. Nachdem man endlich noch leicht einsehen wird, daß es noch eine zweite Asymptote D giebt, so ergeben sich folgende Sätze:

1) Die Hyperbel hat zwei Asymptoten, die beide durch ihren Mittelpunkt gehen;

2) Bildet man ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse gleich der halben Exzentrizität, und dessen eine Kathete gleich der reelen Halbachse ist (die andere Kathete dieses Dreiecks nennt man immaginäre Achse) so ist der Winkel, den die der reelen Halbachse gleiche Seite mit der Hypotenuse bildet, gleich dem Winkel der reelen Achse und der Asymptote. Hieraus ergiebt sich

3) daß die Gestalt der Hyperbel, sobald von den Stücken: Exzentrizität, reele Halbachse, immaginäre Halbachse, Winkel der Asymptote mit der reelen oder immaginären Achse zwei von einander unabhängige bekannt sind, sich die Hyperbel construiren läßt. Denn man kann mit Hilfe der beiden Stücke das rechtwinkelige Dreieck construiren, und erhält dadurch die Exzentrizität (also die gegenseitige Lage der Brennpunkte) und die reele Achse. Wie man aber damit die Hyperbel construiren kann, haben wir schon oben (55. u. 56.) gezeigt.

60. Es sei eine Linie A in einer Fläche gegeben, und eine Linie B in derselben Fläche bewege sich so, daß sie stets in der Fläche bleibt, die Linie A immer berührt, und sich an ihr abwickelt, d. h daß, wenn die Punkte a, b der Linie A bei ihrer Bewegung mit den Punkten c, d der Linie B zusammenkommen, der Bogen $\widehat{ab}$ gleich dem Bogen $\widehat{cd}$ ist. In diesem Falle nennt man jede Curve, die von einem mit der Linie B fest verbundenen Punkte beschrieben wird, eine Cycloide, die Linie A ihre Leitlinie, B ihre Erzeugende. Ist die Fläche, in welcher die Curven A und B liegen, eine Kugel, so nennt man die Cycloide sphärisch. Für die Anwendung sind nur die ebenen Cycloiden wichtig und noch dazu blos diejenigen, für welche die Linien A, B entweder gerad oder kreislinig sind. Man hat daher folgende Curven zu unterscheiden, die die beigesetzten Namen führen:

1) die gemeine Cycloide, mit gerader Leitlinie und kreisliniger Erzeugenden;

2) die Epicyclode, mit kreisliniger Leitlinie und kreisliniger Erzeugenden, und wo die Mittelpunktslinie der beiden Kreise gleich der Summe ihrer Halbmesser ist;

3) die *Hypocycloide* wie bei der vorhergehenden, aber die Mittelpunktslinie gleich der Differenz der Halbmesser;

4) die *Kreisevolvente*, mit kreisliniger Leitlinie und gerader Erzeugenden.

61. Wenn in einem dieser vier Fälle der erzeugende Punkt *nicht* in der erzeugenden Linie liegt, so fügt man dem Namen der Curve noch das Eigenschaftswort „*verkürzt*" oder „*verlängert*" bei, je nachdem der erzeugende Punkt in dem von der Erzeugenden beschriebenen Flächenraume bleibt oder nicht. Ist es unentschieden, ob die Cycloide oder Evolvente *verlängert* oder *verkürzt* ist, so wollen wir sie *verändert* nennen, und demnach unter einer *unveränderten* Cycloide eine solche verstehen, die weder verlängert noch verkürzt ist, bei welcher also der erzeugende Punkt *in* der Erzeugenden liegt.

Fig. 19. 62. Es sei A die Leitende, B die im Punkte a sie berührende Erzeugende einer beliebigen ebenen Cycloide und b ihr erzeugender Punkt, welcher in oder außer B liegen kann. Ferner seien die gleichlangen Bögen $\overset{\frown}{ac}$ und $\overset{\frown}{ad}$ unendlich klein, so daß sie als gerade betrachtet werden können. Dreht man nun die Linie B um a, bis d auf c fällt, so beschreibt b den Bogen be der Cycloide. Dieser Bogen ist aber zugleich ein aus dem Mittelpunkte a beschriebener Kreisbogen, folglich ist die Normale der Cycloide in dem Punkte b die Gerade ba. Hieraus geht der Satz hervor:

Die Normale einer Cycloide in einem Punkte b ist die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Punkte a, in welche die Leitlinie von der dem Punkte b entsprechenden Erzeugenden berührt wird.

Fig. 20. 63. Aufg. Eine *gemeine* Cycloide zu zeichnen, deren Leitlinie A, deren Erzeugende B und deren erzeugender Punkt der Punkt sei, in welchem sich A und B berühren.

Aufl. Hat man die Erzeugende B so weit fortbewegt, daß ihr Punkt a wieder in einen Punkt b der Linie A fällt, so muß (nach 60.) $\overline{ab}$ gleich dem Umfange von B sein. Macht man daher $\overline{ab}$ gleich $3\frac{1}{7}$ mal dem Durchmesser von B, so ist b ein Punkt der Cycloide. Macht man $\overline{ac}$ gleich einem bestimmten Theile von $\overline{ab}$, z. B. $\frac{\overline{ab}}{6}$, und $\overset{\frown}{ad}$ dem ebensovielten Theile des Um-

fanges von B, so ist $\widehat{ad}$ gleich $\overline{ac}$, und es kommt daher beim Fortbewegen der Erzeugenden d mit c zusammen. Macht man nun ce $\perp$ A und $\overline{de}$ gleich dem Halbmesser von B, und beschreibt aus e mit $\overline{ec}$ eine Kreislinie C, so ist diese die Stellung der Ereeugenden, in welcher d auf A fällt. Sucht man nun die entsprechende Lage des erzeugenden Punktes, so wird man finden, daß dieser Punkt g mit dem Punkt d gegen die in der Mitte von $\overline{ac}$ zu A gedachte Senkrechte symmetrisch liegt. Es liegt daher in unserm Falle g links von ce und ist $\widehat{gc} = \widehat{ad}$.

Zieht man die Gerade gc, so ist diese (nach 62.) die Normale der Cycloide für den Punkt g.

64. Aus der Construction der gemeinen Cycloide gehen noch Fig. 20. folgende Eigenschaften dieser Curve hervor: Nimmt man h in der Mitte von ab an und macht hk gleich dem Durchmesser von B und senkrecht zu A, so ist k ein Punkt der Cycloide, der zwischen a und b am weitesten von A entfernt ist, und theilt hk das zwischen a und b enthaltene Stück der Cycloide symmetrisch. Bewegt man B von b aus vorwärts oder von a aus rückwärts so weit fort, daß der ganze Umfang von B sich auf A abgewickelt hat, so erhält man ein dem Cycloidenstücke ab kongruentes Curvenstück; dieses wiederholt sich also von b vorwärts und von a aus rückwärts unendliche Male, und die gemeine Cycloide ist daher eine offene Curve. Da im P (b) die Normale der Cycloide mit A zusammenfällt, so sieht man, daß der P (b) (so wie jeder Curvenpunkt, der in A liegt), ein Grath der Cycloide ist.

65. Alles was in den beiden vorhergehenden Nummern über die gemeinen Cycloiden gesagt wurde, gilt auch für die Epi- und die Hypocycloide, wenn man nicht vergißt, daß in diesem Falle, wo die Linie A eine Kreislinie ist, eine Senkrechte zu A nichts anderes ist, als eine Gerade, die durch den Mittelpunkt von A geht. Nur eines ist abzuändern, nemlich die Art, wie man $\overline{ab}$ dem Umfange von B gleich gemacht hat. Wenn nemlich A kreislinig ist, und es soll der Bogen ab der Kreislinie A gleich dem Umfange der Kreislinie B gemacht, oder es soll überhaupt ein Bogen des Kreises B gleich einem des Kreises A gemacht werden, so ist bekanntlich, wenn α und β die Halbmesser der Kreise A und B, und m^o, n^o die Anzahl Grade ihrer gleichen Bögen sind,

$\alpha : \beta = n^0 : m^0$, wodurch man im Stande ist n aus m zu finden, wenn das Verhältniß der Halbmesser α und β bekannt ist.

Fig. 21. 66. Ist bei der Hypocycloide der Halbmesser des Erzeugungskreises B halb so groß, als der des Leitkreises A, so ist die Hypocycloide ein Durchmesser des Leitkreises. Denn ist a der Berührungspunkt von A und B, und betrachtet man ihn als erzeugenden Punkt, so findet man eine folgende Lage d des erzeugenden Punktes, wenn man auf den Kreislinien A, B die Punkte c, b so annimmt, daß $\widehat{ac} = \widehat{ba}$ ist, eine Kreislinie C zeichnet, die A in c berührt, und auf C den P (d) so annimmt, daß d und b gegen die senkrechte Halbirungslinie von $\widehat{ac}$ symmetrisch liegen. Liegen daher c und b in dem Radius cg, so müssen auch a und d in dem Radius ag liegen. Daß aber b in der G (cg) liegt, läßt sich auf folgendem Wege leicht sehen. Es ist nemlich nur unter der Voraussetzung, daß b in der G (cg) sich befindet, $\wedge$ cga $= \wedge$ bga. Dann hat aber $\widehat{ba}$ (als Bogen des Peripheriewinkels bga) halb so viel Grade als $\widehat{ca}$ (der dem Centriwinkel cga angehört). Da aber noch der Halbmesser des $\widehat{ba}$ gleich dem halben Halbmesser des $\widehat{ac}$ ist, so sieht man, daß unserem Verlangen nach $\widehat{ac} = \widehat{ab}$ wird.

Anm. Hätte die Kreislinie B einen Halbmesser, der kleiner ist, als der halbe Halbmesser von A, so würde der erzeugende Punkt a die A nicht in f treffen, sondern, wenn B bei seiner Bewegung rechts von af bleibt, in einem Punkte h, der rechts von af liegt, und die Hypocycloide $\widehat{ah}$ läge auch rechts von af, während unter denselben Umständen die C (ak) links von af sich befände, wenn der Halbmesser von B größer wäre, als $\overline{ag}$.

Fig. 22. 67. Aufg. Es ist gegeben eine Kreislinie A; man soll ihre Evolvente zeichnen.

Aufl. Man zeichne eine Gerade B, die A in a berührt, wickele B auf A ab und betrachte einen Punkt von B, etwa den P (a) als erzeugenden Punkt, so wird der P (b) der G (B) mit dem P (c) der Kreislinie A zusammen kommen, wenn $\overline{ba}$ gleich $\widehat{ac}$ ist (um diese beiden Längen gleich zu erhalten, verfahre man wie oben in 63., um $\widehat{ac}$ und $\widehat{ad}$ gleich zu erhalten). Zieht man nun cd, so daß es A in c berührt und macht $\overline{cd}$ gleich $\widehat{ac}$ oder gleich $\overline{ab}$, so daß b und d gegen den in der Mitte von $\widehat{ac}$ gedachten Radius symmetrisch liegen, so ist d ein Punkt der

Evolvente und die Gerade cd die dem P(d) entsprechende Normale.

68. Aufg. Eine verlängerte Epicycloide zu zeichnen, wenn der Leitkreis A, der Erzeugungskreis B und der erzeugende Punkt a gegeben sind. Fig. 23.

Aufl. Wir haben den Erzeugungskreis B so gestellt, daß die Verbindungslinie des Punktes a mit dem Mittelpunkte von B durch den Berührungspunkt der Kreise A und B geht. Sucht man nun (nach 63. und 65.) irgend einen Punkt der Epicycloide, die bei der Bewegung von B durch den Punkt b beschrieben wird, z. B. den P(c), so darf man nur den Halbmesser $\overline{cd}$ der entsprechenden Stellung des Erzeugungskreises um ein Stück $\overline{ce} = \overline{ba}$ verlängern, um den entsprechenden Punkt e der gesuchten Curve zu erhalten. Verbindet man e mit dem Berührungspunkt f des Leitkreises und der dem Punkte e entsprechenden Stellung des Erzeugungskreises, so hat man die Normale der verlängerten Epicycloide für den P(e).

Anm. 1. Wäre der P(a) innerhalb des Kreises B gelegen, so erhielten wir eine verkürzte Epicycloide, und man müßte dann $\overline{ce} = \overline{ab}$ vom Halbmesser $\overline{cd}$ abziehen, um den P(e) der verkürzten Epicycloide zu erhalten.

Anm. 2. In ähnlicher Weise verfährt man, um eine verlängerte oder verkürzte gemeine Cycloide, Hypocycloide und Evolvente zu zeichnen.

69. Obgleich (nach der letzten Anmerkung) die Construction der verlängerten Evolvente aus der vorhergehenden Nummer hervorgeht, so wollen wir gleichwohl ein Beispiel über deren Construction machen, aber einen solchen Fall wählen, der in anderer Beziehung noch interessant ist, den Fall nemlich, wo der erzeugende Punkt der Mittelpunkt des Leitkreises ist. Fig. 24.

Es sei demnach A der Leitkreis, seine Tangente B die Erzeugungslinie und der Mittelpunkt a des Kreises A der erzeugende Punkt, so ist a selbst ein Punkt der gesuchten Curve, ab seine Normale und daher C (|| B) seine Tangente. Bewegt man B fort, so daß es sich an A abwickelt (wobei b eine Evolvente und a unsere gesuchte verlängerte Evolvente beschreibt), so wird, wenn B in die Stellung cd kommt, b so nach d kommen, daß $\overline{cd}$ gleich $\frown{cb}$ wird, und a so nach e, daß $\overline{de}$ gleich $\overline{ab}$ und $\perp$ $\overline{cd}$ ist.

Zieht man nun $\overline{ae}$, so ist dieses gleich $\overline{cd}$. Da aber auch $\widehat{fg}$ = Bogen $\overline{cb}$ ist, so ist ae = $\widehat{fg}$. Man erhält daher auch einen Punkt e unserer gesuchten Curve, wenn man eine beliebige Gerade $\overline{ae}$ zieht und sie so lange macht, als den Bogen $\overline{fg}$, der zwischen C und ae eingeschlossen ist. Zieht man noch $\overline{ac} \perp$ ae und verbindet e mit c so ist diese Verbindungslinie, die dem Punkte e zugehörige Normale unserer Curve.

Fig. 25. 70. Aufg. Eine Gerade A dreht sich in einer gegebenen (in der Zeichnung durch einen Pfeil angedeutete) Richtung um den Punkt a, während ein auf ihr liegender Punkt b in einer gegebenen Richtung (z. B. gegen a) so auf ihr fortschreitet, daß er, wenn A in die Lage ad kommt, um $\overline{bc}$ fortgerückt ist, und sich daher in d befindet, und daß seine Fortschreitung zur Drehung der Geraden A immer in demselben Verhältniß bleibt, demnach der Punkt b sich von a entfernt, wenn A sich in entgegengesetzter Richtung dreht.

Aufl. Bezeichnet man den Winkel, um welchen sich A in der gegebenen Richtung drehen muß, um sich in die Stellung (C) zu versetzen, in welcher b nach a kommt, mit α, so verhält sich $\wedge\alpha : \wedge \text{bad} = \overline{ba} : \overline{bc}$ (hier wie 3 : 1), woraus $\wedge\alpha$ gefunden werden kann (hier ist $\alpha = 3 \,.\, \wedge\text{bad}$). Zeichnet man nun eine Kreislinie B so, daß der Bogen von α^0 gleich $\overline{ba}$ ist, daß also, wenn der Halbmesser dieses Kreises mit β bezeichnet wird, $\frac{2 \,.\, 3\frac{1}{7} \,\beta \,.\, \alpha^0}{360} = \overline{ab}$ *) oder $\beta = \frac{180 \,.\, \overline{ab}}{3\frac{1}{7} \,.\, \alpha}$ (hier wo $\alpha = 60^0$, ist $\beta = \frac{21}{22} \,.\, \overline{ab}$), so geht aus den gestellten Bedingungen hervor, daß, wenn man eine beliebige Stellung D der Geraden A und den in ihr liegenden erzeugenden Punkt e zeichnet, $\overline{ae}$ gleich dem zwischen D und C eingeschlossenen Bogen des Kreises B ist. Denn es muß nach den gestellten Bedingungen sich verhalten $\widehat{fg} : \widehat{fh} = \overline{ae} : \overline{ab}$ und ist daher, da $\widehat{fh} = \overline{ab}$, auch Bogen $\widehat{fg} = \overline{ae}$. Daraus geht hervor, daß die vorliegende Curve, welche man Archimedische Spirale nennt, mit der in der vorhergehenden Nummer construirten verlängerten Evolvente identisch ist.

---

*) Für Ausführung von Zeichnungen ist es genau genug, wenn man die Ludolphische Zahl $\pi = 3\frac{1}{7}$ setzt.

71. Aufg. Eine Kreislinie A bewegt sich so, daß ihr Mittelpunkt a eine Gerade in gegebener Richtung beschreibt und ihre Ebene auf dieser Geraden senkrecht bleibt. Zu gleicher Zeit bewegt sich ein Punkt b auf A in einer gegebenen Richtung so, daß er den Umfang des Kreises A durchlaufen hat, wenn der Mittelpunkt a eine gegebene Länge α zurückgelegt hat, und daß die gleichzeitig von a und b durchlaufenen Längen immer in demselben Verhältnisse stehen. Man soll die von a beschriebene C zeichnen. Fig. 26.

Aufl. Man nehme die T_1 parallel zur Ebene der Kreislinie A und die T_2 parallel zur Geraden ab an, so ist $\underline{G}(a_1)$ die vom Mittelpunkt a durchlaufene Gerade. Ist noch $\overline{ac}$ die Länge α, und sind die Richtungen, in welchen sich a und b bewegen sollen, die durch die Pfeile angedeuteten, so wird, wenn man $\overline{bd} = \overline{ac}$ macht, d der Punkt der gesuchten Curve sein, auf welchen b fällt, wenn a nach c gelangt, und daher b die Peripherie von $\underline{A}$ durchlaufen hat. Hat a einen gewissen Theil von $\overline{ac}$, z. B. $\frac{1}{8}\overline{ac}$ durchlaufen und ist daher der Kreis A in die Stellung B gekommen, so hat b den eben so vielten Theil des Umfanges von A (also hier ebenfalls $\frac{1}{8}$ dieses Umfangs) zurückgelegt und ist daher nach e gekommen ($\underline{b_1 e_1} = \frac{1}{8}$ Umfang von A vorausgesetzt); e ist daher ein Punkt der Curve. Nimmt man eben so andere Theile, z. B. $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$ ꝛc. von $\overline{ac}$ und dem Umfange A, so erhält man noch andere Punkte der Curve. Man nennt diese C eine Schraubenlinie, die $\underline{G}(a_1)$ ihre Achse, die Länge α ihre Ganghöhe, und den Bogen $\widehat{bd}$ der C, dessen Endpunkte um die Ganghöhe von einander entfernt sind, einen Schraubengang. Ferner nennt man die Schraubenlinie eine rechte oder linke, je nachdem einem Beobachter, der sich im R_1 eines im + Raume der T_1 liegenden Punktes e der C senkrecht zur T_1 in ihrem + Raume aufstellt, und gegen die Achse hinsieht, derjenige Nachbarpunkt von e welcher einen größeren A_1 hat, als e, zur Rechten oder Linken erscheint.

72. Aus der Construction der Schraubenlinie ist leicht zu ersehen, daß der A_1 ihres erzeugenden Punktes in demselben Verhältnisse zunimmt, wie der Bogen, den sein R_1 beschreibt, und daß, wenn dieser Bogen um 360° zugenommen, der A_1 um eine Ganghöhe sich vergrößert hat. Dieses Gesetz giebt uns ein Mittel an die Hand, die Fig. 27.

Tg der Schraubenlinie A für irgend einen P (d) derselben zu finden.

Lassen wir zu dem Ende die $\mathfrak{K}_2$ durch d_2 gehen, so daß der P (d) in der $\mathfrak{T}_1$ liegt, und denken uns den im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Nachbarpunkt von d mit e bezeichnet (wir haben diesen Punkt e in unserer Fig. nicht gezeichnet, weil er zu nahe an d kommt, wir setzen aber natürlich voraus, daß sein $\mathfrak{R}_1$ mit e_1, sein $\mathfrak{R}_2$ mit e_2 bezeichnet gedacht ist), so ist die G (de) unsere gesuchte Tg, deren $\mathfrak{R}_1$ die Kreislinie A_1 in e_1 berühren muß. Denken wir uns noch auf der Tg (de) einen im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ liegenden Punkt f angenommen, so verhält sich $\overset{\frown}{d_1e_1}$ zu $\overline{ee_1}$, d. h. zum $\mathfrak{A}_1$ des P (e), wie der Umfang der Kreislinie A_1 zur Ganghöhe $(\overline{bc})$. Da aber auch die Dreiecke d_1e_1e und d_1f_1f ähnlich sind, so verhält sich auch $\overset{\frown}{d_1e_1}$ zu $\overline{ee_1}$ wie $\overline{d_1f_1}$ zu $\overline{ff_1}$ oder zu $\overline{f_2f_2}$, woraus sich ergiebt: es verhält sich $\overline{d_1f_1}$ zu f_2f_2 wie die Ganghöhe zum Umfang von A. Hieraus ergiebt sich folgende Construction der Tg (B) für den P (d), wenn die $\mathfrak{K}_2$ so angenommen vorausgesetzt wird, daß d in der $\mathfrak{T}_1$ liegt:

Man zeichnet den $\mathfrak{R}_1$ (B_1) der Tg und nimmt einen P (f) im + Raume der $\mathfrak{T}_1$ so an, daß sein $\mathfrak{R}_1$ (f_1) auf B_1 liegt, und zwar auf der Seite von d_1, auf welcher der im + Raume liegende Nachbarpunkt von d sich befindet; läßt man nun die $\overline{\mathfrak{O}_2}$ des P (f) den eben so vielten Theil der Ganghöhe sein, als $\overline{d_1f_1}$ ein Theil des Umfanges von A_1 ist, so ist f ein Punkt der Tg (B). In unserer Zeichnung ist $\overline{d_1f_1} = \frac{1}{4}$ Umfang A_1 und $\overline{f_2f_2} = \frac{1}{4}\ \overline{b_2c_2}$.

Aus dieser Construction ergeben sich noch folgende Eigenschaften der Schraubenlinie: Sucht man den Winkel, den die Tg B mit der $\mathfrak{T}_1$ oder ihrem $\mathfrak{R}_1$ bildet, so liegt er in einem rechtwinkeligen Dreiecke d_1f_1f, dessen Katheten $\overline{ff_1}$ und $\overline{f_1d_1}$ sich verhalten, wie die Ganghöhe zum Umfange von A_1. Da nun aber für alle Punkte derselben Schraubenlinie dieses Verhältniß dasselbe wird, so folgt folgender Satz:

1) Alle Tg einer Schraubenlinie, deren Achse senkrecht zur $\mathfrak{T}_1$ ist, machen mit der $\mathfrak{T}_1$, also auch mit der Achse gleiche Winkel.

Nimmt man ferner auf der Schraubenlinie A einen P (g) an, der mit einem P (f) der Tg (B) gleichen $\mathfrak{A}_1$ hat, so verhält

sich $\overline{g_2g_2}$ zu $\widehat{d_1g_1}$ wie die Ganghöhe zum Umfange von A_1; eben so verhält sich aber auch $\overline{f_2f_2}$ zu $\overline{d_1f_1}$, also ist, da $\overline{g_2g_2} = \overline{f_2f_2}$ ist, $\widehat{d_1g_1} = \overline{d_1f_1}$. Betrachtet man nun die G(f_2g_2) als K_2, so daß also der P(g) die S_1 (83. Anm.) der Schraubenlinie, der P(f) die S_1 der Tg(B) der Schraubenlinie ist, so gehört der P(f) einer Evolvente der Kreislinie A_1 an, deren Grath in g liegt. Da sich dies nun eben so für alle Tg der Schraubenlinien nachweisen läßt, so folgt der Satz:

Die ersten Spuren der Tg einer Schraubenlinie A, deren Achse auf der T_1 senkrecht steht, bilden eine Evolvente der Kreislinie A, deren Grath die erste Spur der Schraubenline ist.

Zweiter Abschnitt.

Von den krummen Flächen.

§. 6.

Allgemeine Regeln für die Bestimmung krummer Flächen.

73. Zur Bestimmung krummer Flächen nehmen wir, wie bisher, zwei auf einander senkrechte Tafeln an und bestimmen so viele Linien der Fläche, als zu ihrer Bestimmung nothwendig sind. Um jedoch hiebei mit möglichst wenig Linien auszukommen, betrachten wir jede Fläche als entstanden durch Bewegung einer Linie von bekanntem Namen. Dabei ist es nicht nothwendig, ja in der Regel auch nicht der Fall, daß diese Linie während ihrer Bewegung ihre Gestalt behält, sondern sie kann ihre Dimensionen ändern, wenn sie nur in allen ihren Stellungen den Namen verdient, den sie ursprünglich gehabt hat. Ist die Linie eine Gerade, so kann natürlich von einer Gestaltsänderung keine Rede sein; ist sie aber eine Kreislinie, so kann sie während ihrer Bewegung ihren Halbmesser ändern, nur darf sie nicht aufhören, eine Kreislinie zu sein; ist sie eine Ellipse, so kann sie ihre Achsen ändern u. s. w.

Um nun die Bewegung dieser Linie, die wir die Erzeugende (Ez) der zu bildenden Fläche nennen, graphisch zu bestimmen, giebt man die Beziehungen an, in denen die Erzeugende zu gegebenen Punkten, Linien, Flächen während ihrer Bewegung bleiben soll. Diese gegebenen Dinge nennen wir die Leitenden

der zu bildenden Fläche, die gegebenen Beziehungen der Erzeugenden zu den Leitenden das Bewegungsgesetz der Erzeugenden.

74. In den meisten Fällen ist es am einfachsten als Leitende eine Linie zu geben, die von allen Erzeugenden (in endlicher oder unendlicher Entfernung) geschnitten wird, und demnach auf der zu bestimmenden Fläche liegt. Eine solche Leitende wollen wir Schneidlinie nennen.

Unter Schneidlinie (SchL) einer Fläche verstehen wir daher jede Linie auf der Fläche, die alle Erzeugenden in endlicher oder unendlicher Entfernung schneidet.

75. Soll eine, auf die eben beschriebene Art gegebene Fläche bestimmt sein, so muß unter den gegebenen Leitenden der Fläche sich wenigstens eine SchL befinden und durch jeden Punkt dieser Schneidlinie eine Ez, aber in der Regel auch nur eine einzige, möglich sein.

76. Es giebt Flächen, die sich auf verschiedene Arten erzeugen lassen, und daher verschiedene Systeme von Erzeugenden zulassen. In diesem Falle muß man, wenn von der Erzeugenden die Rede ist, näher bezeichnen, welchem Systeme dieselbe angehören soll.

77. Zwei unendlich nahe Linien einer Fläche nennt man Nachbarlinien und den von ihnen gebildeten Flächenstreifen ein Flächenelement. Es ist klar, daß das Auge zwei Nachbarlinien nicht unterscheiden kann und demnach für die Zeichnung zwei Nachbarlinien oder ein Flächenelement als eine einzige Linie der Fläche erscheinen.

78. Denkt man sich die R_1 sämmtlicher Punkte einer Fläche gesucht, so nennt man ihren Inbegriff den R_1 der Fläche. Da aber sämmtliche Erzeugende der Fläche sämmtliche Flächenpunkte enthalten, so erhält man auch den R_1 einer Fläche, wenn man die R_1 aller ihrer Erzeugenden zeichnet. Hierbei sind dreierlei Fälle möglich: Es ist der R_1 der Fläche

1) die unbegrenzte T_1 (in welchem Falle also ein R_1 der Fläche nicht gezeichnet werden kann),
2) eine Linie,
3) ein (also von Linien begrenzter) Theil der T_1.

79. Im Falle 2) muß jeder Punkt des R_1 der Fläche der R_1 einer Linie der Fläche sein. Da aber nur ein L_1 einen Punkt zum R_1 hat, so müssen in diesem Falle die Erzeugenden der Fläche gerade Linien sein, die auf der T_1 senkrecht stehen. Wir erhalten also den Satz:

Nur diejenige Fläche, deren Erzeugende Gerade sind, die auf der T_1 senkrecht stehen, hat eine Linie zum R_1. Eine solche Fläche nennen wir einen Lothcylinder.

80. Wendet man zur Bestimmung einer Fläche schiefe oder Central-Risse an und soll der R' der Fläche eine Linie sein, so muß jeder Punkt dieser Linie der R' eines St' sein, und müssen demnach die Erzeugenden der Fläche St' sein. Da aber diese entweder parallel sind oder alle durch einen Punkt (Centrum) gehen, so folgen im Zusammenhange mit der vorhergehenden Nummer folgende Sätze:

1) Es giebt nur zweierlei Flächen, deren Risse Linien sein können, nemlich solche, deren Erzeugende Gerade sind, die entweder parallel laufen (Cylinder) oder die durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen (Kegel) (s. 91. u. 92.).
2) Die Risse dieser Flächen sind dann Linien, wenn die Erzeugenden derselben Lothe oder Strahlen sind. Im letzteren Falle uennen wir die Fläche einen Strahlencylinder oder Strahlenkegel, je nachdem die Strahlen, welche die Fläche bilden, parallel laufen, oder durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen.

81. Ist der R_1 einer Fläche ein Theil der T_1, so ist er von Linien begrenzt, die man zusammen den ersten Umriß (UR_1) der Fläche nennt. Da jeder Punkt dieses UR_1 der R_1 eines Flächenpunktes ist, so muß es auf der Fläche eine Linie geben, deren R_1 der UR_1 der Fläche ist. Diese Linie der Fläche nennen wir das erste Profil (Pr_1) der Fläche. Ein ähnliches ist unter UR_2 und Pr_2 zu verstehen.

82. Liegt ein Punkt a auf einer Fläche, so müssen die Risse des Punktes auf den entsprechenden Rissen der Fläche liegen. Liegen nun die Risse des P (a) auf den Rissen der Fläche, so folgt daraus in der Regel noch nicht, daß auch der P(a)

der Fläche angehöret. Denn es folgt daraus blos, daß der P (a) in der G (a_1) und der G (a_2) liegt, und wir können nur dann behaupten, daß der P (a) der Fläche angehört, wenn entweder die G (a_1) oder die G (a_2) in dieser Fläche liegt. Da aber dies der Fall ist, wenn der R_1 oder R_2 der Fläche eine Linie ist (s. 79.), so folgt der Satz:

Damit ein Punkt auf einer Fläche liegt, deren R_1 eine Linie ist, ist es nothwendig aber auch gerade hinreichend, daß der R_1 des Punktes in dem R_1 der Fläche liegt.

Ebenso läßt sich erweisen, daß, wenn der R′ einer Fläche eine Linie ist (s. 80.) und der R′ eines Punktes in dem R′ der Fläche liegt, auch der Punkt selbst der Fläche angehören muß.

Ist aber kein Riß der Fläche eine Linie, so können wir nur dann behaupten, daß der Punkt der Fläche angehört, wenn seine Risse in denen einer Linie der Fläche (einer Ez z. B.) liegen.

Anm. Liegt ein Punkt, der auf einer Linie einer Fläche liegt, zugleich in der T_1, so nennen wir ihn die erste Spur (S_1) der Linie. In diesem Falle gehört der Punkt auch der Fläche und der T_1, also auch der Linie an, die die Fläche mit der T_1 gemein hat, und die erste Spur (S_1) der Fläche heißt. Wir haben daher den Satz:

Die S_1 einer Linie einer Fläche liegt in der S_1 der Fläche.

83. Liegt der R_1 eines Punktes einer Fläche, deren Ez gerade Linien sind, zugleich in ihrem UR_1, so muß der R_1 der durch diesen Punkt gehenden Ez (wenn dieser R_1 kein Punkt ist) mit dem UR_1 zusammenfallen oder ihn berühren. Denn würde er diesen schneiden, so ginge er über den UR_1, welcher doch die Grenze des R_1 der Fläche ist, hinaus. Es besteht demnach der UR_1 aus R_1 von Ez, oder er ist eine krumme Linie, die von allen R_1 von Ez, welche mit dieser E Punkte gemein haben, berührt wird.

Fig. 28. 84. Ist a ein Punkt einer Fläche, dessen R_1 (a_1) in dem UR_1 (A_1) der Fläche liegt, und wir legen durch ihn eine E (B_1), welche die Fläche nach einer Linie B schneidet, so muß in der E (B_1) die G (a) die Grenze sein zwischen in dieser Ebene mit der G (a_1) möglichen Parallelen, die mit der Linie B Punkte gemein haben

oder nicht. Demnach ist (nach 29.) entweder $\mathfrak{P}$ (a) ein Grath, oder die $\mathfrak{S}$ (a) berührt die Linie B im $\mathfrak{P}$ (a) (in welch letzterem Falle das $\mathfrak{KL}_2$ des $\mathfrak{P}$ (a) die B_2 in a_2 berührt). Hieraus folgt der Satz:

> Soll ein $\mathfrak{P}$ (a) dem $\mathfrak{Pr}_1$ (A) einer Fläche angehören, so muß eine durchgelegte $\mathfrak{E}(B_1)$ die Fläche nach einer Linie B schneiden, die entweder in a einen Grath hat, oder deren $\mathfrak{Tg}$ in a auf der $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht.

Diese Bedingung ist nun zwar nothwendig, aber nicht genügend. Denn es könnte sich treffen, daß zwar, wie für den $\mathfrak{P}$ (b) die $\mathfrak{Tg}$ an der $\mathfrak{E}$ (B) $\perp$ $\mathfrak{T}_1$ ist, daß aber diese $\mathfrak{Tg}$ außerdem noch die $\mathfrak{E}$ (B) schneidet. Will man also das $\mathfrak{Pr}_1$ in dem Sinne, wie wir es oben (81.) erklärt haben, finden, so muß man sich noch überzeugen, daß das durch a gelegte $\mathfrak{L}_1$ mit der $\mathfrak{E}$ (B) keinen weiteren Punkt gemein hat, oder wenn ja, daß dieser Punkt dieselben Eigenschaften wie der $\mathfrak{P}$(a) hat, d. h. daß er entweder ein Grath ist oder in ihm die $\mathfrak{E}$(B) von der $\mathfrak{S}(a_1)$ berührt wird. Da man aber gewohnt ist, von jeder Fläche nicht blos den $\mathfrak{UR}_1$ zu zeichnen, sondern auch den $\mathfrak{R}_1$ einer jeden Linie, deren Punkte die im obigen Satze ausgesprochene Eigenschaften haben, auch wenn ihre Lothe die Fläche in noch anderen Punkten schneiden, so wollen wir von nun an jede solche Linie $\mathfrak{Pr}_1$ der Fläche heißen, und ihrem $\mathfrak{R}_1$ den Namen Profilriß geben und dann sind die obigen Bedingungen genügend.

85. Wenn ein $\mathfrak{L}_1$ eine Fläche schneidet, so geschieht dies in Fig. 28.
der Regel in mehr als einem Punkte. Denken wir uns nun die $\mathfrak{T}_1$ so angenommen, daß alle diese Schnittpunkte eines $\mathfrak{L}_1$ mit der Fläche im positiven Raume der $\mathfrak{T}_1$ liegen, so nennen wir denjenigen dieser Punkte sichtbar in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$, der den größten $\mathfrak{A}_1$ hat. Ferner nennen wir eine auf der Fläche gezeichnete Linie, so weit sichtbar in Bezug auf die $\mathfrak{T}_1$, als ihre Punkte für die $\mathfrak{T}_1$ sichtbar sind und zeichnen die sichtbaren Theile mit zusammenhängenden, die unsichtbaren mit unterbrochenen Strichen. Wenn nun ein Punkt einer Fläche ihrem $\mathfrak{Pr}_1$ angehört, so ist dieser Punkt sichtbar in Bezug auf $\mathfrak{T}_1$, wenn sein $\mathfrak{L}_1$ entweder, wie das des $\mathfrak{P}$ (a) keinen weiteren Punkt enthält, oder, wenn ja, wenn die übrigen Punkte, die sein $\mathfrak{L}_1$ mit der

Fläche gemein hat (wie dies für den P(b) der Fall ist), einen kleineren A_1 haben, als der Punkt selbst. Hat aber das L_1 eines Punktes des Pr_1, des P(e) z. B., mit der Fläche noch einen Punkt gemein, der einen größeren A_1 hat, als der P(e), so ist der P(e) unsichtbar in Bezug auf T_1. Wenn wir demnach die ersten Profilrisse zeichnen, so müssen wir immer untersuchen, ob oder wie weit sie sichtbar sind oder nicht, wie weit wir sie also zusammenhängend ausziehen oder stricheln. Wir wollen die in Bezug auf die T_1 sichtbaren Pr_1 schlechtweg sichtbare Pr_1 nennen.

Hat man nun auf einer Fläche eine Linie, die ein sichtbares Pr_1 der Fläche in einem P(a) schneidet, so ist dieser Punkt sichtbar in Bezug auf die T_1, während von den zunächst an a liegenden Punkten diejenigen unsichtbar sind, welche einen kleineren, und die sichtbar, welche einen größeren A_1 haben, als a. Das letztere findet aber seine Grenze, wenn der Punkt in einem L_1 liegt, das einen sichtbaren Punkt eines Pr_1 der Fläche enthält, wie der P(h), dessen L_1 auch den Profilpunkt b enthält. Hieraus geht der Satz hervor:

Die Grenze zwischen dem zusammenhängend und unterbrochen gezeichneten Theil des R_1 einer auf einer Fläche gezeichneten Linie, liegt auf dem sichtbaren ersten Profilriß der Fläche.

Anm. Setzt man in der vorliegenden Nummer überall 2 oder 3 statt 1, so erhält man dieselben Betrachtungen und Gesetze in Bezug auf die T_2 oder T_3. Somit haben wir die Regeln, nach welchen wir in der Folge immer die Risse einer jeden auf einer Fläche liegenden Linie zeichnen, wenn ihre Profilrisse bekannt sind. Wir werden daher in der Folge nicht mehr begründen, warum die Risse solcher Linien zum Theil gestrichelt sind, sondern überlassen es jedesmal dem Schüler, sich darüber Rechenschaft zu geben.

§. 7.

Eintheilung der Flächen.

86. Wir bringen die unzählig verschiedenen Flächen dadurch in Hauptabtheilungen, indem wir sie nach der Gestalt ihrer Erzeugenden zusammenstellen, und nennen daher eine Fläche eine ge-

radlinige oder Regelfläche, eine kreislinige, eine elliptische Fläche u. s. w., je nachdem ihre Erzeugenden Gerade, Kreislinien, Ellipsen u. s. w. sind.

87. Die Unterabtheilungen dieser Hauptgruppen stellen wir dadurch her, daß wir das Bewegungsgesetz der Erzeugenden mit in Rücksicht ziehen. Für die geradlinigen Flächen werden wir die Unterabtheilungen so bilden können, daß diese zusammengenommen alle geradlinigen Flächen umfassen. Bei den krummlinigen Flächen hingegen werden wir nur diejenigen Gruppen besonders betrachten und benennen, die für die Anwendnng ein besonderes Interesse haben.

88. Bewegt man eine Gerade nach einem bestimmten Gesetze fort, so werden im Allgemeinen zwei Nachbarerzeugende nicht in einer Ebene liegen. Sind wir hievon überzeugt, so nennen wir die Fläche windschief.

Wir verstehen also unter einer windschiefen Fläche (abgek. WF) eine solche geradlinige Fläche, deren Elemente uneben sind.

89. Sind alle Ez der WF parallel einer Ebene, so nennen wir diese Ebene die Leitebene der WF, und diese Fläche selbst eine WF mit Leitebene.

Anm. Legt man durch einen Punkt zu allen Ez einer WF Parallele, so bilden diese eine Ebene, die Leitebene, wenn die WF eine solche hat, aber einen Kegel, wenn die Fläche keine Leitebene besitzt. Der Analogie wegen wollen wir nun diesen Kegel, dessen Ez zu denen der WF parallel sind, Leitkegel nennen.

90. Bewegt sich eine Gerade so, daß je zwei Nachbarerzeugende in einer Ebene liegen, so nennt man die erzeugte Fläche eine entwickelbare. Bei einer solchen Fläche werden zwei Nachbarerzeugende sich in der Regel schneiden, und so im Allgemeinen eine Curve entstehen, von der jeder Punkt ein Schnitt zweier Nachbarerzeugenden ist. Wir nennen diese C den Grath (auch Wendecurve, Rückkehrcurve) der entwickelbaren Fläche. Da jede Erzeugende zwei Nachbarinnen hat (eine vorhergehende und eine folgende), so wird sie mit dieser Curve zwei unendlich nahe Punkte gemein haben, d. h. sie berühren. Aus dem eben Gesagten folgt:

1) Wir verstehen unter einer entwickelbaren Fläche (abgek. EF) eine solche, deren Elemente eben sind.
2) Der Grath einer EF ist diejenige Curve auf ihr, die von allen Erzeugenden berührt wird.

91. Wir haben oben gesagt, daß die Schnittpunkte je zweier Nachbarerzeugenden im Allgemeinen eine Curve bilden. Es kann sich nemlich auch treffen, daß diese Punkte alle in einen zusammenfallen. In diesem Falle nennt man die Fläche eine Kegelfläche (Kegel, konische Fl., Konus), den Punkt, in welchem sich alle Erzeugende schneiden, seinen Mittelpunkt (Centrum), und jeden der beiden Theile der Fläche, in welche sie durch das Centrum getheilt wird, einen Kegelmantel.

Wir verstehen also unter einer Kegelfläche (abgek. KF) jede geradlinige Fläche, deren Erzeugende alle durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen.

92. Endlich kann es sich auch treffen, daß alle Erzeugende mit einander parallel laufen. In diesem Falle nennt man die Fläche eine Cylinderfläche (Cylinder, Walze), jeden Schnitt derselben mit einer auf seinen Ez senkrechten Ebene sein Profil, und jede mit seinen Ez parallele Gerade seine Richtung.

Wir verstehen also unter einem Cylinder (abgek. CF) jede geradlinige Fläche, deren Erzeugende parallel sind.

Anm. Man wird nicht Gefahr laufen können, den Namen Profil eines Cylinders zu verwechseln mit seinem Profil in Bezug auf eine Tafel (z. B. Pr_1, Pr_2), da im letzteren Falle immer eine Zahl beigefügt ist, welche die Tafel bezeichnet, auf die sich das Profil bezieht. Wenn wir also vom Profil eines Cylinders sprechen, ohne Beifügung einer Ordnungszahl, so meinen wir immer einen zu seinen Ez senkrechten Schnitt.

93. Bewegt sich eine veränderliche Kreislinie so, daß ihr Mittelpunkt eine Gerade durchläuft, und ihre Ebene auf dieser Geraden senkrecht bleibt, so nennt man die von ihr erzeugte Fläche eine Drehungsfläche (Rotationsfläche), jede kreislinige Erzeugende einen Parallelkreis und die durch die Mittelpunkte dieser Parallelkreise gehende Gerade die Drehungsachse (Achse) der Fläche. Es ist ferner leicht einzusehen, daß alle Schnitte von die Achse enthaltenden Ebenen mit der Drehungsfläche unter sich congruent sind, und daß jeder solche

Schnitt von der Drehungsachse symmetrisch getheilt wird, also die Drehungsachse zur Achse hat (s. 8.) Man nennt jeden solchen Schnitt einen Meridian, seine durch die Achse entstandene Hälfte einen Halbmeridian und seine Ebene eine Meridianebene.

Wir verstehen also unter Drehungsfläche jede kreislinige Fläche, deren Ez ihre Mittelpunkte in einer auf ihren Ebenen senkrechten Geraden haben, oder eine Fläche, die sich von Ebenen, die durch eine gemeinschaftliche Gerade gehen, nach kongruenten symmetrischen Linien schneiden läßt.

94. Bewegt sich eine Ellipse so, daß ihr Mittelpunkt eine Gerade (Achse) beschreibt, ihre Ebene auf dieser Achse senkrecht bleibt, jede der Ellipsenachsen eine Ebene (Hauptebene) beschreibt, und ihre Halbachsen sich nach einem gegebenen Gesetze ändern, jedoch so, daß ihr Verhältniß unverändert bleibt, so nennen wir diese elliptische Fläche eine Ovalfläche, die erzeugenden Ellipsen Parallelellipsen, jeden Schnitt der Fläche mit einer die Achse enthaltenden Ebene einen Meridian und ihren Schnitt mit einer Hauptebene einen Hauptmeridian.

Wir verstehen also unter einer Ovalfläche (OF), jede Fläche, welche durch parallele Ebenen nach Ellipsen geschnitten werden kann, deren Mittelpunkte in einer zu ihren Ebenen senkrechten Geraden, deren gleichnamige Achsen in einer Ebene liegen, und deren Achsenverhältniß gleich ist.

95. Jede von den genannten Flächen kann unter Umständen (die wir im folgenden §. angeben wollen) zweiter Ordnung sein. In diesem Falle trägt sie zugleich die den Flächen zweiter Ordnung eigenthümlichen Eigenschaften (s. 144.) an sich.

§. 8.

Graphische Bestimmung der verschiedenen Flächen, ihre Bezeichnungen und Arten.

96. Sind für eine geradlinige Fläche keine besonderen Eigenschaften verlangt, in welchem Falle diese Fläche im Allgemeinen eine WF wird, so ist das einfachste Mittel zu ihrer Bestimmung, so viele Schneidelinien (s. 74.) zu geben, als nothwendig sind.

Es läßt sich nun leicht einsehen, daß man drei solche braucht. Denn nimmt man in einer derselben einen Punkt an, so sind dadurch unzählige Erzeugende möglich, die die andere schneiden. Alle diese Erzeugenden bilden, da sie durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen (91.), eine Kegelfläche (in besonderen Fällen vielleicht auch eine Ebene). Sucht man nun diejenige Erzeugende auf, welche zugleich die dritte Schneidelinie trifft, so muß dieselbe durch den Punkt gehen, in welchem diese dritte Schneidelinie die eben genannte Kegelfläche schneidet. Hat man nun die Schneidelinien so angenommen, daß die Kegelfläche von der dritten Schneidelinie nur in einem Punkte geschnitten wird, so ist durch solche drei Schneidelinien die Fläche bestimmt. Hat aber die WF eine Leitebene (89.) und ist diese gegeben, so genügen zwei Schneidelinien. In diesem Falle werden wir die Tafeln so annehmen, daß eine davon, z. B. die T_1 die Leitebene ist.

Wir werden daher eine WF nur dann als graphisch bestimmt ansehen, wenn entweder drei SchL oder zwei Schneidlinien und die Leitebene gegeben sind. Heißen im ersten Falle die drei SchL A, B, C, so heißt die Fl : WF (A, B, C); ist im letzteren Falle die T_1 die Leitebene und heißen die SchL A, B, so heißen wir die Fläche: WF (A, B, T_1).

Anm. 1. Ist eine der SchL einer WF gerade, so nennt man die Fläche ein Conoid. Sind in diesem Falle drei Schneidlinien gegeben, so nehmen wir eine Tafel z. B. die T_2 so an, daß sie auf der geraden SchL senkrecht steht und demnach der R_2 von dieser ein P (a_2) ist. Heißen dann die anderen beiden Schneidlinien A, B, so heißt die Fläche: WF (A, B, a_2). Sind alle gegebenen Schneidlinien gerade, so ist die Fläche zweiter Ordnung, und sie heißt windschiefes Hyperboloid, wenn sie keine Leitebene, Paraboloid, wenn sie eine solche hat. Ist die eine SchL eine Schraubenlinie, die andere ihre Achse und eine zu dieser senkrechte Ebene die Leitebene, so heißt die Fläche rechtwinkelige Schraubenfläche; sind aber dieselben zwei Schneidlinien, und statt der Leitebene die Bedingung gegeben, daß alle Erzeugende mit der Achse der Schraubenlinie gleiche Winkel (α) bilden sollen, so heißt die Fläche eine schiefwinklige Schraubenfläche. In diesem einzigen Falle begnügen wir uns mit

zwei Schneidlinien für eine WF ohne Leitebene. Steht hier die Achse der Schraubenlinie (A) senkrecht zur T_1, und ist ihr R_1 mit a_1 bezeichnet, so bezeichnen wir die Schraubenfläche mit WF (A, a_1, α).

97. Ist die Fläche entwickelbar, so werden, wie sich später zeigen wird, zwei Schneidlinien zu ihrer Bestimmung genügen. Heißen diese A und B, so nennen wir die Fläche : EF (A, B). Noch einfacher aber läßt sich die EF bestimmen durch ihren Grath. Es ist leicht einzusehen, daß durch ihn allein die Fläche bestimmt ist. Denn da alle Erzeugenden der EF den Grath berühren, so entspricht jedem Punkte desselben nur eine Erzeugende. Heißt der Grath A, so heißen wir die Fläche : EF(A).

98. Wenn von einer KF das Centrum gegeben ist, so genügt eine Schneidlinie zu ihrer Bestimmung. Denn man kann durch jeden Punkt dieser Linie nur eine Ez legen, indem diese auch durch das Centrum gehen muß.

Wir betrachten daher eine KF dann als bestimmt, wenn von ihr das Centrum und eine Schneidlinie bekannt sind. Heißt diese A, jenes a, so nennen wir die Fläche : KF (A, a).

99. Denkt man sich hier die R_1 von allen Ez gezeichnet, so sieht man leicht ein, daß es entweder (wie in Fig. 34. b) keinen UR_2 giebt, oder wenn ein solcher existirt, er aus Geraden gebildet wird, welche die R_1 von Ez sind. Diese R_1 von Ez, welche den UR_1 bilden, können dann entweder wenn (wie in Fig. 32. a) der R_1 der Schneidlinie eine begrenzte Linie ist, durch ihre Endpunkte gehen, oder wenn der R_1 der Schneidlinie (wie in Fig. 55.) unbegrenzt ist, Tangenten an diesem R_1 sein.

Anm. Ist die Schneidlinie einer KF eine Linie zweiter Ordnung, so ist die KF eine Fläche zweiter Ordnung.

100. Ist von einer CF die Richtung (B) (92.) gegeben, so genügt eine Schneidlinie zu seiner Bestimmung. Denn durch jeden Punkt dieser Linie ist nur eine Ez möglich, da diese || B sein muß.

Wir betrachten daher eine CF als bestimmt, wenn seine Richtung und eine Schneidlinie gegeben sind. Heißt diese A, die Gerade, welche seine Richtung bestimmt, B, so nennen wir die Fläche : Cf(A, || B). Was den UR_1 oder UR_2 betrifft, so gilt dasselbe auch hier, was wir

oben in dieser Beziehung für die KF gesagt haben, nur werden hier die beiden Geraden, welche den UR_1 oder UR_2 bilden, parallel sein. Wir haben aber noch zu bemerken, daß, indem wir den UR_1 und UR_2 einer CF zeichnen, dadurch zugleich seine Richtung gegeben ist. Nennt man nemlich (Fig. 35.) B die Gerade, deren Risse die Umrisse der in dieser Figur dargestellten CF sind, so ist diese G (B) || CF.

NB. Man hüte sich ja, diese G (B) für eine Cz der CF zu halten. Man kann sich leicht überzeugen, daß sie es nicht ist; denn die Punkte, welche ihre Risse mit denen der Schneidelinie A gemein haben, sind nicht die Risse eines Punktes.

101. Steht eine CF senkrecht auf der T_1, so ist sein R_1 eine Linie. Dieser R_1 der CF genügt aber auch zu seiner Bestimmung. Denn durch jeden Punkt dieses R_1 ist eine Cz und nur eine einzige bestimmt, da diese Cz $\perp$ T_1 ist.

Wir werden daher eine auf der T_1 senkrechte CF dadurch bestimmen, daß wir ihren R_1 zeichnen. Heißt dieser A_1, so nennen wir die Fläche: CF (A_1). Es ist demnach unter CF(A_1) die CF zu verstehen, die A_1 zum R_1 hat.

Anm. Ist die Schneidlinie einer CF oder sein R_1, falls dieser eine Linie ist, eine Linie zweiter Ordnung, so ist die CF selbst eine Fläche zweiter Ordnung.

102. Ist der R′ einer CF oder KF eine Linie (83.), so ist durch diesen R′ die Fläche bestimmt, vorausgesetzt, daß die Richtungen der St′ oder ihr Centrum bekannt ist. Heißt dieser R′ A′, so nennen wir die Fl : CF (A′) oder beziehungsweise KF (A′).

103. Eine DF ist bestimmt, wenn außer ihrer Achse noch eine Schneidlinie gegeben ist. Denn nimmt man in dieser einen Punkt a an, so kann durch ihn nur ein einziger Parallelkreis gelegt werden. In der That legt man durch den P (a) eine zur Achse senkrechte Ebene, die sie im P (b) schneidet, so ist dieser Punkt der Mittelpunkt und $\overline{ab}$ der Halbmesser des Parallelkreises, der außerdem in der angenommenen Ebene liegen muß. Er ist also seiner Gestalt und Lage nach vollkommen bestimmt. Wir werden in der Regel als Schneidlinie einen Meridian zeichnen, und zwar denjenigen, dessen Ebene mit einer T, z. B. der T_2 parallel ist, und der daher mit seinem R_2 gleiche Gestalt hat,

während sein R_1 eine zur K_1 parallele Gerade ist. Wir nennen diesen Meridian Hauptmeridian. Damit ein solcher aber möglich sei, müssen und werden wir immer eine Tafel z. B. die T_2 so annehmen, daß sie mit der Achse der DF parallel ist. Setzen wir zugleich fest, daß wir immer diejenige Achse dieses Meridians (als Hilfslinie, also mit abwechselnd aufeinanderfolgenden Strichen und Punkten) zeichnen, die zugleich Achse der DF ist (s. 94.), so ist die DF durch diesen Meridian vollkommen bestimmt.

Wir bestimmen also ein DF dadurch, daß wir den Hauptmeridian oder seine Hälfte zeichnen, und zugleich die Flächenachse als Hilfslinie darstellen. Bezeichnen wir dann diesen Meridian (oder den Halbmeridian) mit A, so nennen wir die Fl : DF (A). Unter DF (A) ist daher zu verstehen diejenige DF, deren (ganzer oder halber) Meridian A ist, und deren Achse die (als Hilfslinie) gezeichnete Achse dieses Meridians ist. Wollen wir bei der Bezeichnung der DF die Achse mit aufnehmen, so schreiben wir, wenn diese a_1 heißt: DF (A, a_1), oder wenn sie mit B bezeichnet ist, DF(A, B), wobei sich aus der Zeichnung ergiebt, welcher Buchstabe die Achse und welcher den Meridian bezeichnet.

104. Ist die Ebene des Hauptmeridians || T_2, so sind die R_2 aller Parallelkreise Gerade, senkrecht zum R_2 der Drehungsachse. Denkt man dieselben gezeichnet, so sieht man, daß das Pr_2 der Hauptmeridian ist (wie in Fig. 38.), und daß der UR_2 (in Fig. 42.) noch von zwei Geraden begrenzt wird. Nimmt man noch, wie wir dies in der Regel thun werden, die T_1 senkrecht zur Drehungsachse an, so sind die R_1 sämmtlicher Parallelkreise Kreislinien, deren Mittelpunkt im R_1 der Achse liegt. Denkt man sich nun alle diese R_1 gezeichnet, so wird man leicht einsehen, daß der UR_1 der DF gebildet wird von dem R_1 des größten oder kleinsten Parallelkreises.

105. Ist die Schneidlinie einer DF eine Gerade, die senkrecht zur Achse ist, so ist die DF eine auf der Achse senkrechte Ebene; ist sie eine Gerade, die parallel ist zur Achse, so ist diese Fläche zugleich eine CF, die den Namen Drehungscylinder (abg. DCF) führt; ist sie eine Gerade, die die Achse schneidet, so nennt man die Fläche Drehungskegel (DKF); ist sie eine

Gerade, die die Achse kreuzt, so heißt die Fläche Drehungshyperboloid mit einem Mantel, und diese ist gleichartig mit einer DF, die zum Meridian eine Hyperbel hat, deren immaginäre Achse die Drehungsachse ist (Anh. 7.). Ist der Meridian eine Ellipse, deren große oder kleine Achse die Drehungsachse ist, so hat man ein Drehungsellipsoid; ist er eine Parabel, deren Achse mit der der DF zusammenfällt, so nennt man die Fläche Drehungsparabeloid; ist er eine Hyperbel, deren reele Achse die Drehungsachse ist, so erhält man das Drehungshyperbeloid mit zwei Mänteln, (diese Fläche besteht nemlich, wie leicht einzusehen ist, aus zwei unter sich nicht zusammenhängenden Theilen (Mänteln), von denen jeder einen Ast derjenigen Hyperbel enthält, die als Meridian gegeben war). Sämmtliche ebene aufgezählte Flächen sind zweiter Ordnung. Ist der Halbmeridian eine Kreislinie, so heißt die Fläche ein Wulst.

106. Ist der Meridian eine Kreislinie, deren Mittelpunkt in der Drehungsachse liegt, also zugleich Mittelpunkt der Fläche ist, so heißt die Fläche eine Kugelfläche. Diese Fläche, welche auch zweiter Ordnung ist, hat vor allen anderen DF die Eigenschaft voraus, daß jede durch ihren Mittelpunkt gehende Gerade als Drehungsachse betrachtet werden kann, daß sie also unzählige Achsen hat, während jede andere DF nur eine solche besitzt. Zur Bestimmung der Kugel ist es genügend, wenn ihr Mittelpunkt a und die Länge α ihres Halbmessers gegeben sind. Eine so bestimmte Kugel nennen wir dann Kugel (a, α). Oder es ist ihr Hauptmeridian A gegeben, dann heißt sie Kugel (A).

NB. Aehnlich wie bei der Kreislinie verstehen wir unter Halbmesser der Kugel die Entfernung ihres Centrums von einem Punkte ihrer Oberfläche, während wir unter ihrem Radius (Strahl) jede Gerade verstehen, die durch ihr Centrum geht, ohne Rücksicht auf ihre Grenzpunkte.

107. Zur Bestimmung von Ovalflächen werden wir immer die eine Tafel, etwa die T_1 senkrecht zu ihrer Achse und die T_2 parallel zu einer Hauptebene (94.) annehmen. Dann zeichnen wir den Hauptmeridian dieser Hauptebene (dessen R_1 eine zur K_1 parallele Gerade, und dessen R_2 mit dem Hauptmeridian selbst gleiche Gestalt hat) und zugleich, wie bei den DF, diejenige Achse des Hauptschnittes, welche zugleich Achse der OF ist.

Geben wir außerdem noch das Achsenverhältniß der Parallelellipsen dadurch an, daß wir zwei Längen, α und β, zeichnen, deren Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ gleich dem anzugebenden Achsenverhältniß ist, und zwar so, daß der Zähler (α) der mit der T_2 parallelen Ellipsenachse entspricht, so kann man sich leicht in ähnlicher Weise, wie bei den DF, überzeugen, daß die OF bestimmt ist.

Heißt der gegebene (zur T_2 parallele) Hauptmeridian A, das Achsenverhältniß der Parallelellipsen (in oben angegebenem Sinne) $\frac{\alpha}{\beta}$, so nennen wir die dadurch bestimmte Fläche: OF $\left(A, \frac{\alpha}{\beta}\right)$.

Es ist leicht einzusehen, daß es sich mit dem Pr_2 einer so gegebenen OF wie mit der einer DF verhält, daß dagegen der UR_1 der OF zusammenfällt mit dem R_1 der größten oder kleinsten Parallelellipse. Zeichnet man diesen, so geben seine Achsen zugleich das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ an.

Anm. Ist der Hauptschnitt eine OF eine Linie zweiter Ordnung, deren Achse also die Achse der OF ist, oder besteht er aus zwei parallelen oder sich schneidenden Geraden, so ist diese Fläche selbst zweiter Ordnung.

§. 9.

Berührung von Flächen mit Geraden und Ebenen.

108. Wenn eine Linie A eine Linie B einer Fläche in einem P (a) berührt, so sagt man, die Linie A berührt die Fläche in dem P(a). Da wir aber dann sagen können, die Linie A hat mit B zwei unendlich nahe Punkte gemein, und weil ferner diese Punkte auch unserer Fläche angehören, so hat auch A mit der Fläche zwei unendlich nahe Punkte gemein. Hieraus folgt:

Wenn eine Linie A mit einer Fläche einen P (a) gemein hat, so berührt A die Fläche im P (a), sobald eine durch a gehende Linie der Fläche von A im P (a) berührt wird, oder sobald A mit der Fläche außer dem P (a) noch einen seiner Nachbarpunkte gemein hat.

Ist A eine Gerade, so nennt man sie eine Tangente (Tg) der Fläche im P (a).

109. Soll man daher in einem P(a) einer Fläche eine Tangente an diese legen, so zieht man durch a auf der Fläche eine beliebige Linie und legt in a an diese Linie eine Tangente, so ist sie zugleich eine Tangente der Fl. Hieraus geht aber hervor, daß es in der Regel unzählige Tangenten einer Fl für einen Punkt a derselben giebt. Da aber diese Tangenten alle durch einen Punkt gehen, so ist vor allem die Frage, ob sie eine Ebene oder eine KF bilden. Nehmen wir an, die von der Tg gebildete Fläche wäre eine KF, welche die T_1 nach einer Linie A, die wir als Schneidlinie des Kegels ansehen, schneidet. Nimmt man nun eine E (B_1) an, welche mit der KF die Geraden ab und ac gemein hat, die gegebene Fläche aber nach einer Linie B schneidet, die in B_1 ihren R_1 hat und durch den P (a) geht, so sind (nach 108.) ab und ac Tg der Linie B für den P(a). Soll daher die von den Tangenten gebildete Fläche eine KF sein, so muß der Schnitt einer durch a gelegten Ebene die Fläche nach einer Linie schneiden, die in a zwei Tangenten zuläßt, also in a einen Doppelpunkt hat; der Punkt a muß demnach ein besonderer Punkt der Fläche sein. Ist also der Punkt ein gewöhnlicher Flächenpunkt, so können seine Tangenten keine KF bilden, sondern sie müssen alle einer Ebene angehören; diese Ebene nennt man eine Tangential- oder Berührungsebene der Fläche im P (a). In der That legt man nun durch den P (a) eine Ebene, welche die Fl nach einer Linie A und die Tangentialebene nach einer Geraden B schneidet, die A in a berührt, so kommt man nur auf eine Tangente. Nun könnte aber noch der Fall vorkommen, daß alle durch den P (a) möglichen Linien der gegebenen Fläche sich in a berühren und also ihre Tangenten für a zusammenfallen, demnach in a nur eine Tangente zur Fläche möglich wäre. (Man denke sich z. B. als Halbmeridian einer DF einer Kreislinie, welche die Achse in einem P (a) berührt, so ist in a nur eine Tangente an die Fläche möglich). Aus dem eben Entwickelten ergiebt sich folgender Satz:

In einem Punkte a giebt es in der Regel unzählige Tangenten an eine Fläche, die alle eine Ebene bilden. Diese Ebene nennt man die Tangentialebene (abg. TE), den P (a) den Berührungspunkt der TE. Eine Ausnahme von dieser Regel

findet nur für besondere Flächenpunkte statt, in denen entweder die Tangenten eine KF bilden oder zusammenfallen.

110. Geht durch einen P (a) einer Fläche eine Gerade A, welche auf der diesem Punkte entsprechenden TE senkrecht steht, so sagt man, die G (A) steht auf der Fläche senkrecht. Man nennt dann die G (A) eine Normale (N) der Fläche im P (a), den P (a) den Fußpunkt der N und jede durch die N gelegte Ebene eine Normalebene (NE) der Fläche.

111. Haben zwei Flächen einen Punkt a gemein, und haben sie in diesem Punkte eine gemeinschaftliche TE oder N, so sagt man, die Flächen berühren sich in diesem Punkte. Haben zwei Flächen eine Linie A gemein, und zugleich in jedem Punkte dieser Linie eine gemeinschaftliche TE, so sagt man, die Flächen berühren sich nach der Linie A.

112. Es haben zwei Flächen eine Linie A gemein und außerdem noch eine Linie B, die der Linie A unendlich nahe ist (und also in der Zeichnung mit A zusammenfällt). Nimmt man nun auf A einen Punkt a an, ferner auf derselben Linie einen dem P (a) unendlich nahen P (b), endlich auf der Linie B einen P (c), der dem P (a) gleichfalls unendlich nahe ist, und denkt sich die TE der einen der beiden Flächen für den P (a), so enthält sie die Geraden ab und ac, weil diese Tg der Fläche im P (a) sind. Demnach ist diese TE die E (abc). Eben so ist aber auch die E (abc) die TE der anderen Fläche für den P (a). Also haben die beiden Flächen in jedem Punkte von A eine gemeinschaftliche TE. Es folgt demnach der Satz:

Wenn zwei Flächen eine Linie A und außerdem eine unendlich nahe daran liegende Linie gemein haben, so berühren sich die Flächen nach der Linie A.

113. Es giebt demnach folgende Mittel, eine TE an einer Fläche F zu finden, wenn ihr Berührungspunkt a gegeben ist:

1) Da die TE alle Tangenten der Fläche für den P (a) enthält, aber schon durch zwei Gerade bestimmt ist, so legt man im P (a) an die F zwei Tangenten A, B, und die E (A B) ist die gesuchte TE.

2) Man zeichnet die N (A) der Fläche, die a zum Fußpunkte hat, und legt durch a eine Ebene, die ⊥ A ist.

3) Man zieht durch den P (a) auf F eine Linie A (etwa eine Ez), nimmt eine Fläche F' an, die F nach A berührt, und sucht die dem P (a) entsprechende TE der Fläche F'.

114. Ist für eine Fläche (F) eine Tg zu suchen, deren Berührungspunkt a gegeben ist, so ergeben sich zur Auffindung derselben folgende Mittel:

1) Man zieht auf F eine Linie A (am besten eine Ez), die durch a geht, und legt an diese eine Tg, die a zum Berührungspunkt hat.

2) Man legt in a ein TE an F und zieht durch a eine Gerade, die in der TE liegt.

3) Man zeichnet eine N der Fläche, die a zum Fußpunkt hat und errichtet in a zu dieser N ein Senkrecht.

4) Man nimmt eine NE der Fläche für den P (a) an und errichtet dazu eine Senkrechte.

§. 10.

Umhüllungsflächen.

115. Läßt man eine Fläche von bekanntem Namen nach einem gegebenen Gesetze bewegen, (wobei es wieder zulässig ist, daß sie sich während ihrer Bewegung ändeet, ohne jedoch aufzuhören den Namen zu verdienen, den sie ursprünglich gehabt hat), so werden je zwei Nachbarstellungen dieser bewegten Fläche sich nach einer Linie schneiden, und so eine stetige Reihe von Linien erhalten werden, die eine neue Fläche bilden. Diese neue Fläche nennt man eine **Umhüllungsfläche** (**Umhüllung**) der sich bewegenden Fläche, jede Stellung der bewegten Fläche **eine umhüllte Fläche** (**Umhüllte**) der neuen Fläche, und jede Linie, nach welcher sich zwei benachbarte Umhüllte schneiden eine **Charakteristik** der Umhüllungsfläche.

116. Da jede Umhüllte **zwei** Nachbarinnen hat (eine vorhergehende und eine folgende), so enthält sie **zwei** (unendlich nahe liegende) Charakteristiken oder ein Element der Umhüllungsfläche; **sie berührt also die Umhüllungsfläche nach einer Charakteristik** (s. 112.) Wir erhalten also die Sätze:

1) **Wenn eine Fläche sich nach einem bestimmten Gesetze bewegt, so giebt es immer eine Fläche (Umhüllung), welche von jeder Stellung (Umhüllten)**

der bewegten Fläche nach einer Linie (Charakteristik) berührt wird.

2) Jede Charakteristik ist der Durchschnitt zweier Nachbar-Umhüllten.

117. Ist die Umhüllte eine Ebene, so sind die Charakteristiken gerade und liegt jedes Element der Umhüllung in einer umhüllten Ebene; demnach hat dann die Umhüllungsfläche ebene Elemente, und ist sie somit eine eine entwickelbare Fläche. Wir haben also die Sätze:

1) Jede Umhüllung einer Ebene ist eine entwickelbare Fläche.

2) Gehen alle umhüllten Ebenen durch einen festen Punkt, so ist die Umhüllung eine KF, deren Centrum der feste Punkt ist.

3) Sind alle umhüllten Ebenen parallel mit einer Geraden, so ist die Umhüllung eine CF, die mit der Geraden parallel ist.

118. Verlangt man von der umhüllten Ebene, daß sie während ihrer Bewegung auf einer gegebenen Curve A normal bleibt, so wird die Umhüllungsfläche der Ebene von allen Normalebenen (also auch von allen Normalen) der Curve A berührt, und man nennt dann diese Umhüllungsfläche die Evolutenfläche der Curve A. Ist die C (A) eben, so sind die Charakteristiken senkrecht zur Ebene der A, und die Umhüllung ist eine CF. Ist A sphärisch (8.), so gehen alle Charakteristiken durch das Centrum der Kugel von A, und die Umhüllung ist eine KF.

120. Nimmt man auf einer Charakteristik A einer Umhüllungsfläche einen P (a) an, und legt dadurch eine E (abc), die die Umhüllungsfläche nach einer Linie B, die der Charakteristik A entsprechende Umhüllte aber nach einer Linie C schneidet, so haben B und C den Punkt a gemein. Legt man nun in a eine Tg an B, so liegt diese in der E (abc) und in der dem P (a) entsprechenden TE der Umhüllungsfläche. Legt man in a eine Tg an C, so liegt diese ebenfalls in der E (abc) und in der dem P (a) entsprechenden TE der Umhüllten für A. Da aber diese TE mit der vorhin erwähnten zusammenfällt (indem sich die Umhüllung und Umhüllte in jedem Punkte der A berühren), so fallen die beiden genannten Tg zusammen, und B und C berühren sich daher

in a. Nimmt man statt der schneidenden E (abc) eine Tafel, z. B. die T_1 an, so sind die Linien B, C beziehungsweise die Spuren der Umhüllung und Umhüllten. Es folgt daher der Satz:

Die Spur einer Umhüllung wird in jedem Punkte von der durch diesen Punkt gehenden Spur der Umhüllten berührt.

120. Ist die Umhüllte eine Ebene, ihre Spur C daher eine Gerade, so berührt diese die Spur B der Umhüllung in dem Punkte a, in welchem die gerade Spur C der Umhüllten von der in dieser liegenden Charakteristik A geschnitten wird. Da aber A und C sich entweder schneiden oder parallel sind (d. h. sich in unendlicher Entfernung schneiden), so folgt:

1) Die Spur einer jeden umhüllten Ebene tangirt die gleichnamige Spur der Umhüllung in endlicher oder unendlicher Entfernung (in letzterem Falle ist die Spur der Umhüllten die Asymptote für die Spur der Umhüllung) und daraus folgt

2) Die Spur der Umhüllung ist die Umhüllungscurve von sämmtlichen Spuren der umhüllten Ebenen.

Anm. Da man auf diese Art die beiden Spuren A und B der Umhüllung einer umhüllten Ebene erhalten kann, so ist diese Umhüllungsfläche die EF (A, B) (s. 97.)

121. Die Betrachtungen in der vorhergehenden Nr. geben uns ein Mittel, um eine beliebige Ez einer EF (A B) zu finden, wenn A und B die Spuren dieser EF sind, und überzeugen uns zugleich, daß in diesem Falle durch A und B die EF bestimmt ist. Nimmt man nemlich auf A einen P (a) an, und sucht die dadurch gehende Ez C, so wird die S_1 (D) der der G (C) entsprechenden umhüllten Ebene eine Tg an A in P (a) sein, während die S_2 dieser Ebene (welche bekanntlich durch den P (b) gehen muß, in welchem D die K schneidet), die Linie B berühren muß. Zieht man daher durch b an B eine Tg (E), welche diese im P (c) berührt, so ist c ein Punkt der gesuchten Ez und b c diese gesuchte Ez (C).

Anm. Da durch b mehr als eine Tg an B möglich sein kann, so muß man, wenn die EF bestimmt sein soll, angeben, welche von den Tg genommen werden muß. Hat man dies bei

einer Tg festgesetzt, so ist die Zweideutigkeit für alle folgenden Ez gehoben; denn denkt man sich auf A einen dem P (a) benachbarten Punkt angenommen, so wird die diesem Punkt entsprechende Ez so gewählt werden müssen, daß sie die B in einem dem P (c) benachbarten Punkte berührt u. s. f.

122. Es sei die Umhüllte eine Kugel mit gegebenem unveränderlichen Halbmesser α, deren Mittelpunkt eine gegebene Linie A durchläuft. Nimmt man auf A einen P (a) an, den man als Mittelpunkt einer umhüllten Kugel (a, α) ansieht (s. 106.), und sucht die Linie, nach welcher diese Kugel von einer zweiten (b, α) geschnitten wird, deren Mittelpunkt b auf A liegt, und so angenommen ist, daß die beiden Kugeln sich schneiden, so erhält man bekanntlich als Durchschnitt eine Kreislinie B, deren Ebene die G ($\overline{ab}$) senkrecht halbirt. Ist nun b ein Nachbarpunkt von a, so ist die Kugel (b, α) die Nachbar-Umhüllte der Kugel (a, α) und die Kreislinie B ist eine Charakteristik unserer Umhüllung. In diesem Falle ist aber auch die G (ab) eine Tangente der Linie A für den P (a), und der Halbirungspunkt der G ($\overline{ab}$) fällt für die Zeichnung mit a zusammen; es liegt daher die Kreislinie B in der Ebene, welche durch a geht und auf der in a zur Linie A gezogenen Tg senkrecht steht, d. h. in einer NE der Linie A für den P (a). Wir haben also den Satz:

Die Charakteristiken einer Umhüllungsfläche, deren Umhüllte Kugeln von gegebenem unveränderlichen Halbmesser sind, und deren Mittelpunkte in einer gegebenen Linie A liegen, sind größte Kreise dieser Kugeln, deren Ebenen NE der Linie A sind.

Man nennt diese Umhüllungsflächen Röhrenflächen.

Ist die Linie A eine Gerade, so ist die Fläche eine Drehungs-EF, ist sie eine Kreislinie, so erhält man offenbar einen Wulst (s. 105); ist endlich die Linie A eine Schraubenlinie, so nennt man die Fläche eine Serpentine.

123. Denkt man sich durch alle Punkte der Charakteristik B der Röhrenfläche senkrechte zu ihrer Ebene gelegt, so erhält man eine EF, die die Kugel (a, α) nach B berührt und deren Ez mit der in a zur Linie A gedachten Tg parallel laufen. Da aber die Kugel (a, α) die Röhrenfläche nach der Kreislinie B berührt

(116. Satz 1)), so berührt die eben genannte CF die Röhrenfläche nach der Kreislinie B. Es folgen daher die Sätze:

1) Legt man durch die Charakteristik einer Röhrenfläche eine CF, deren Cz auf der Ebene der Charakteristik senkrecht stehen, so berührt diese CF die Röhrenfläche nach dieser Charakteristik.

2) Die Röhrenfläche ist als Umhüllung einer DCF zu betrachten, deren Achse die Leitlinie berührt, und deren Halbmesser gleich dem der Röhrenfläche ist.

§. 11.

Eigenschaften der verschiedenen Flächen.

124. Schneidet man durch zwei parallele Ebenen irgend eine CF, so sind ihre Schnittlinien ≌, eine KF, so sind sie ähnlich.

125. Legt man durch eine Gerade einer CF eine Ebene, so ist sie mit allen Cz der CF parallel; sie hat also mit der CF blos diese Gerade oder noch andere mit dieser parallele Gerade gemein. Legt man durch eine Gerade einer KF eine Ebene, so wird sie mit allen anderen Geraden das Centrum der KF gemein haben. Enthält sie von einer anderen Geraden noch einen Punkt, so enthält sie die ganze Gerade. Legt man durch eine Gerade A einer CF mit Grath eine Ebene (E), so wird diese Ebene von den übrigen Geraden nach Punkten geschnitten, die eine Curve D geben. Heißen nemlich B und C die beiden Nachbarerzeugenden von A, so werden die Punkte, nach welchen B und C die E schneidet, (in endlicher oder unendlicher Entfernung) in A liegen müssen, und somit die E (D) von A (in endlicher oder unendlicher Entfernung) berührt werden. Daß aber D keine Gerade ist, davon kann man sich auf folgende Art überzeugen. Die Ez A schneidet D und bildet daher mit dieser, wenn sie gerade ist, eine E (AD). Die Ez (B) schneidet D und A, (und zwar nicht in einem Punkte, weil wir keine KF voraussetzen) also liegt sie in E (AD); die Nachbar-Ez von B schneidet B und D, also liegt auch diese in der E (AD) u. s. f. Setzt man also D als gerade voraus, so ist unsere CF eine Ebene. Es geht hieraus hervor:

Legt man durch eine Gerade A einer CF eine Ebene, die die CF nach einer zweiten Linie (D)

schneidet, so ist diese entweder (bei der EF) eine Gerade || G (A), oder (bei der KF) eine Gerade, die A (im Centrum der KF) schneidet oder es ist D eine E, die A berührt.

126. Heißt A eine Ez einer EF, B ihre Nachbarin, so bilden A und B eine E (AB), zu der also A und B parallel sind; ist nun C die Nachbar-Ez von B, die C schneidet, so kann C mit der E (AB) nicht parallel sein, ohne mit dieser Ebene zusammenzufallen. Daraus geht der Satz hervor:

Die Ez einer EF können nicht parallel zu einer einzigen Ebene sein.

Anm. Hat man daher eine geradlinige Fläche, auf welcher mehr als ein Paar sich schneidender Geraden vorkommen, die verschiedene Schnittpunkte haben (also keine KF), oder deren sämmtliche Ez parallel einer Ebene sind, ohne selbst parallel zu sein, so kann eine solche Fläche keine EF, sie muß also eine WF sein.

127. Soll eine TE eine EF in einem P (a) berühren, so muß sie die durch a gehende Ez (A) der EF und irgend eine Tg (C) der EF für den P (a) enthalten. Diese Tg (C) enthält aber außer dem P (a) noch einen dem P (a) unendlich nahen P (b) der EF. Legt man durch diesen die Nachbar-Ez (B) von A, so liegt diese in der E (AC), weil sie durch einen P (b) derselben geht und eine G (A) derselben schneidet. Man sieht also, daß die E (AC), d. i. die TE im P (a) außer der Ez (A) noch ihre Nachbarin B enthält, und demnach (112.) die EF nach A berührt. Es folgt hieraus der Satz:

1) Wenn eine Ebene eine EF nach einem P (a) berührt, so berührt sie auch diese Fläche nach der durch a gehenden Ez A der EF, und kann demnach jeder Punkt dieser Ez, die wir die Berührungserzeugende der TE nennen wollen, als Berührungspunkt der TE angesehen werden. Daraus folgt noch ferner:

2) Jede G (B) in der der Ez A entsprechenden TE einer EF, die die Ez (A) in einem P (b) schneidet, ist eine Tg der EF im P (b); weil nemlich b als Berührungspunkt der TE angesehen werden kann (113. 2)). Ferner folgt noch aus dem Satze 1):

3) Alle einer Ez A einer EF entsprechenden N dieser Fläche liegen in einer (durch A gehenden und auf der TE für A senkrechten) Ebene, welche für alle Punkte von A NE der EF ist.

128. Da jede TE einer EF eine Ez derselben enthält, und diese bei der EF parallel sind zur Richtung der EF, bei der KF durch dessen Centrum gehen, so sieht man, daß alle TE an einer EF parallel zu ihrer Richtung sind, an einer KF durch das Centrum gehen. Diese Bedingungen sind aber für die TE nicht genügend, sondern es ist noch nothwendig, daß die TE eine Tg an der EF oder KF enthält. Bedenkt man weiter, daß die TE einer EF mit dieser zwei Nachbarerzeugende A, B gemein hat, die den Grath der EF (wenn ein solcher vorhanden ist), berühren, daß also A die Nachbarpunkte b und a, B die a und c mit dem Grath gemein hat, so sieht man, daß die TE einer EF mit ihrem Grath drei Folgepunkte gemein hat, also eine Krümmungsebene desselben ist. Weil es aber in einem Punkte einer E nur eine Krümmungsebene für dieselbe giebt, so folgen im Zusammenhange mit dem oben Gesagten folgende Sätze:

1) Damit eine Ebene TE ist an einer EF, ist es nothwendig und genügend, daß sie parallel zur Richtung der EF ist, und eine Tg derselben enthält;
2) an einer KF, daß sie durch das Centrum und eine Tg der KF geht;
3) an einer EF mit Grath, daß sie eine Krümmungsebene des Graths ist.

129. Legt man durch eine Ez A einer WF eine Ebene (E), so wird diese von den übrigen Ez (in endlicher oder unendlicher Entfernung) in Punkten geschnitten, die zusammen eine Linie B geben, die alle Ez schneidet, und daher als Schneidlinie der WF angesehen werden kann. Sind die gegebenen Schneidlinien der WF gerade Linien, und suchen wir die Punkte a und b, in welchen zwei Ez C und D die E schneiden, so ist die G (ab), weil sie C und D schneidet und mit A in einer Ebene liegt, eine Schneidlinie der WF (Anh. 10., 11. u. 12.). Da es aber nur eine Schneidlinie in der E giebt, indem jede Ez die E in nur einem Punkte schneidet, so sieht man, daß die Linie, nach welcher unsere E von der Ez

geschnitten wird, eine gerade Schneidlinie ist. Demnach erhalten wir die Sätze:

1) Wenn wir durch eine Ez A einer WF eine Ebene (E) legen, so enthält diese Ebene außer A noch eine Schneidlinie B.

2) Ist E parallel mit der Leitebene der WF, so liegt B in unendlicher Entfernung, oder es giebt dann in der E keine Schneidlinie.

3) Hat die WF gerade Schneidlinien, so ist die Schneidlinie, welche die E enthält, eine Gerade.

130. Nennen wir im Falle 3) der vorigen Nr. den Punkt, in welchem sich die in unserer E liegenden Geraden A und B schneiden, P (a), und suchen wir in ihm die TE an der WF, so muß sie durch A und B gehen, also mit E (AB) zusammenfallen. Es ist also die E oder die E (AB) TE der WF in dem P (a). Ist aber A || B, oder liegt B in unendlicher Entfernung (welcher letzterer Fall, wie wir oben gesehen haben, eintritt, wenn E parallel zur Leitebene ist), so fällt der P (a) in unendlicher Entfernung. Wir haben also den Satz:

Legt man durch eine Ez (A) einer WF zweiter Ordnung (oder, was dasselbe ist, mit geraden Schneidlinien) eine Ebene, so ist sie TE dieser Fläche, und ihr Berührungspunkt ist da, wo A von der in der Ebene liegenden Schneidlinie getroffen wird. Ist B || A oder ist E parallel zur Leitebene, so liegt der Berührungspunkt in unendlicher Ferne, und man nennt die Ebene eine asymptotische Ebene.

131. Hat man auf einer WF eine Ez und auf ihr drei Punkte a, b, c und legt man in jedem dieser Punkte eine Tg an die WF, so daß man die Geraden A, B, C erhält, welche die WF, oder, was dasselbe ist, die durch die drei gegebenen Punkte gelegten Linien D, E, F der WF in den Punkten a, b, c berührt, so berührt die WF (A, B, C) die WF (D, E, F) nach der Ez (abc). Denn da A und D sich im P (a) berühren, so haben sie den auf D liegenden P (d) gemein, der dem P (a) benachbart ist. Legt man nun durch d eine Ez (def) der WF (D, E, F), so ist diese Ez die Nachbarin von der Ez (abc), und schneidet daher die E nach einem P (e), der dem P (b) benachbart ist,

und daher auf der Tg (B) der Linie E liegt; eben so die F nach einem P (f), der auf C liegt. Es haben daher die beiden WF zwei Nachbarerzeugenden gemein und berühren sich deshalb (s. 112.) nach der Ez (abc). Da man nun noch durch a, b, c unzählige Tg an die WF legen kann, so folgt der Satz:

Es giebt unzählige WF zweiter Ordnung, die eine gegebene WF nach einer Ez (A) berühren. Jede solche WF (zweiter Ordnung) hat zu Schneidlinien drei Tg der gegebenen WF, die ihre Berührungspunkte in A haben.

132. Legt man durch die Ez (A) irgend einer WF eine Ebene, und denkt man sich eine WF zweiter Ordnung, die die gegebene nach A berührt, so wird (nach 130.) die Ebene die WF zweiter Ordnung in einem Punkte von A berühren. Da sich aber die beiden WF selbst in A berühren, so folgt, daß auch die Ebene die gegebene WF berührt. Demnach haben wir den Satz:

Jede Ebene, die eine Ez (A) irgend einer WF enthält, berührt diese in einem Punkte von A.

Man erhält diesen Punkt, wenn man drei Tg (B, C, D) an die WF legt, die sie in Punkten von A berühren, wodurch man eine neue WF (B, C, D) erhält. Sucht man nun, wo zwei Ez der WF (B, C, D) die Ebene schneiden, und verbindet man diese Punkte durch eine Gerade, so ist ihr Schnitt mit A der verlangte Punkt.

133. Jede N einer WF, die ihren Fußpunkt auf einer Ez (A) hat, steht auf einer durch A gehenden Ebene, folglich auch auf der G (A) senkrecht; demnach sind alle solche N parallel zu einer auf A senkrechten Ebene, und bilden, da sie nicht selbst parallel sind, eine WF mit Leitebene. Man kann sich aber auf folgendem Wege überzeugen, daß diese WF sogar vom zweiten Grade ist. Denn denkt man sich diese Normalfläche um die Ez (A) um 90° gedreht, so fällt irgend eine N (B) der gegebenen WF im P (b) in die dem P (b) entsprechende TE dieser Fläche und wird also zu einer Tg (B), die im P (b) auf der Ez (A) senkrecht steht. Eben so wird eine zweite N (im P (c)) zu einer Tg (C) im P (c), eine dritte zu einer Tg (D) im P (d) u. s. f. Betrachten wir nun die auf A senkrechten Geraden B, C, D nach der Drehung um 90° als SchL einer WF (B, C, D)

(welche Fläche offenbar ein windschiefes Paraboloid ist, da B, C und D Gerade sind, die ⊥ A, also mit jeder zu A senkrechten Ebene parallel sind), so berührt diese (nach 131.) die gegebene WF und sind demnach alle SchL der WF (B, C, D), Tg der gegebenen WF, die auf A senkrecht stehen. Da aber auch die Ez unserer um 90° gedrehten Normalfläche diese Eigenschaften haben, und wir die SchL der WF (B, C, D) auch als ihre Ez ansehen dürfen, so sieht man, daß unsere gedrehte Normalfläche mit der WF (B, C, D) zusammenfällt, demnach vor ihrer Drehung gleiche Gestalt mit ihr hat. Wir haben also den Satz:

Sämmtliche N einer WF, deren Fußpunkte auf einer Ez dieser Fläche liegen, bilden ein windschiefes Paraboloid, dessen Leitebene auf der Ez senkrecht steht.

134. Denkt man sich an den Meridian einer DF in einem P (a) desselben eine Tg (B) gelegt, und betrachtet diese als Meridian einer geradlinigen DF, so haben diese beiden DF, weil die Linien A und B zwei unendlich nahe Punkte gemein haben, zwei unendlich nahe Parallelkreise gemein, d. h. sie berühren sich nach einem Parallelkreis C. Ist nun zufällig die Tg (B) parallel zur Achse der DF (A), so ist die DF (B) eine CF und man nennt dann den Parallelkreis C den Aequator; ist die Tg (B) senkrecht zur Achse, so ist die DF (B) eine Ebene, die die DF (A) entweder nach einem Punkte oder nach einem Parallelkreis berührt. Findet das erstere statt, so muß der P (a) in der Achse liegen und wir nennen dann diesen Punkt einen Pol der DF. Liegt aber der Punkt a nicht in der Achse, so berührt die ebene DF (B) die DF (A) nach einem Parallelkreis C, dem wir den Namen Polarkreis geben wollen. Ist aber die Tg (B) weder senkrecht noch parallel zur Achse, so ist DF (B) eine KF, deren Centrum in der Achse liegt. Wir haben daher die Sätze:

1) Jedem Aequator einer DF (A) entspricht eine cylindrische DF (B), die nach ihm die DF (A) berührt, und deren Ez || zur Achse sind.
2) Jedem Pol oder Polarkreise einer DF (A) entspricht eine Ebene, die nach ihm die DF (A) berührt und ⊥ Achse ist.

3) Jedem anderen Parallelkreis C entspricht eine konische DF (B), die nach ihm die DF (A) berührt und ihr Centrum in der Achse hat.

4) Die Achse einer DF ist ihre N für jeden ihrer Pole.

135. Betrachtet man den Meridian A einer DF (A) als Schneidlinie einer CF, deren Cz auf der Ebene der A senkrecht stehen, so werden alle diese Cz Tg an Parallelkreisen der DF (A) sein, also jede zwei unendlich nahe Punkte und daher die CF zwei unendlich nahe Linien mit der DF (A) gemein haben. Hieraus folgt der Satz:

Jedem Meridian einer DF entspricht eine CF, die nach ihm die DF berührt, und auf der Ebene des Meridians senkrecht steht.

136. Hat man für einen P (a) eine DF einer TE, so berührt diese (111.) sowohl die KF, welche die DF nach dem durch a gehenden Parallelkreis, als auch die CF, welche die DF nach dem durch a gelegten Meridian A berührt; es steht demnach diese TE auf der Ebene der A senkrecht. Hieraus folgen die Sätze:

1) Jede Meridianebene einer DF ist für alle Punkte ihres Meridians NE der DF.

2) Jede N einer DF liegt mit ihrer Achse in einer Ebene.

3) Alle N einer DF, deren Fußpunkte auf einem Parallelkreis liegen, bilden in der Regel eine konische DF; für den Aequator eine Ebene und für den Polarkreis eine CF.

4) Alle N einer DF, deren Fußpunkte auf einem Meridian liegen, bilden eine Ebene, nemlich die Ebene des Meridians.

137. Ist der Meridian einer DF eine Hyperbel, deren imaginäre Achse mit der Achse der DF zusammenfällt, so nennt man diese DF, welche zweiter Ordnung ist, ein **Hyperboloid mit einem Mantel**. Hat man eine Ebene (TE), die diese Fläche in einem P (a) berührt, so kann man die T_1 senkrecht zur Drehungsachse, und die T_2 so annehmen, daß der durch a gelegte Meridian A zum Hauptmeridian wird. Dann steht (136. 1)) die TE $\perp$ T_2 und ihr N_2 (B_2) berührt A_2 in a_2. Man sieht nun

leicht, daß die E (B_2) die DF (A) nach einer offenen Linie zweiter Ordnung geschnitten wird, die vom P (a) aus nach vier Richtungen geht, und demnach (s. Anh. 3.) aus zwei in a sich schneidenden Geraden besteht, die mit der Achse der DF gleiche Winkel bilden. Es geht hieraus hervor:

1) Daß man durch jeden Punkt eines Drehungs-Hyperboloids mit einem Mantel zwei sich schneidende Gerade legen kann, daß daher diese Fläche eine WF ist.

2) Daß die Ebene dieser beiden Geraden diese DF berührt, und zwar in dem Schnittpunkte der beiden Geraden.

138. Man wird sich leicht überzeugen, daß jede Gerade, die auf dem einmanteligen Drehungshyperboloid gezogen werden kann, alle Parallelkreise schneidet, und demnach als Schneidlinie unserer DF angesehen werden kann, sobald man die Parallelkreise als Ez betrachtet. Da aber eine DF, deren Achse gegeben ist, durch eine Schneidlinie bestimmt ist, so ist unsere DF, wenn ihre Achse bekannt ist, durch eine auf ihr liegende Gerade ebensowohl bestimmt, als durch ihren Meridian. Es ist daher auch zweckmäßiger, die in Rede stehende DF durch ihre Achse und eine von den beiden Geraden, die durch einen Punkt derselben gelegt werden können, zu bestimmen. Denken wir diese Gerade um die Achse der DF gedreht, und betrachten sie so als Ez, so erhalten wir ebenfalls unsere DF, und überzeugen uns so, daß diese erzeugende Gerade während ihrer Bewegung gleiche Winkel mit der Achse bilden. Nehmen wir daher in der Drehachse einen Punkt an und legen durch ihn Parallele zu allen diesen Geraden, so erhalten wir einen Drehungskegel, den man, wenn sein Centrum in dem Mittelpunkte des Hyperboloids angenommen ist, den asymptotischen Kegel dieser Fläche nennt. Daraus geht aber hervor, daß unsere DF keine Leitebene hat und ein besonderer Fall des windschiefen Hyperboloids ist.

139. Es sei a_1 der R_1 der Achse, und A eine Gerade eines Hyperboloids, die || T_2 ist, so ist der R_1 des Aequators, da dieser der kleinste Parallelkreis, also das Pr_1, unserer DF ist, eine aus a_1 beschriebene und A_1 berührende Kreislinie. Da ferner der Punkt a der Drehachse der G (A) am nächsten liegt, so ist a der Fig. 29a.

Mittelpunkt unseres Hyperboloids. Nehmen wir diesen als Centrum einer KF an, deren Ez mit denen unserer DF parallel sind, so erhalten wir den asymptotischen Kegel. Ziehen wir daher durch a eine G (B) || G (A), so ist G (B) eine Ez dieses Kegels. Suchen wir nun die S_1 unserer DF (s. 84. Anm.) und unserer KF, die beide Kreise sind, die ihr Centrum in a_1 haben, so wird man aus der Zeichnung leicht erkennen,

1) daß der Halbmesser der S_1 des Hyperboloids die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist, dessen Katheten der Halbmesser des Aequators und der der S_1 des asymptotischen Kegels sind.

Ferner sieht man leicht ein, (weil der Aequator das Pr_1 ist und jede Ez den Aequator schneidet), daß (s. 83.)

2) jede Ez des Hyperboloids zum R_1 eine Tg an dem R_1 des Aequators hat.

Betrachtet man noch die E (AB), so sieht man, daß diese eine TE des asymptotischen Kegels ist, da sie durch a geht und ihre Spur die des Kegels berührt. Die E (AB) enthält aber auch die beiden (parallelen) Geraden A und C des Hyperboloids, also ist diese Ebene asymptotische Ebene desselben. Dreht man diese Ebene um die Achse, so wird man einsehen, daß, was wir über die E (AB) gesagt haben, auch für jede TE des Kegels gilt. Wir wissen demnach

3) daß jede TE des asymptotischen Kegels asymptotische Ebene des Hyperboloids ist.

Endlich geht aus der Gleichung, die wir für die Meridiane unserer beiden DF bekommen (s. Anh. 7.) hervor,

4) daß, wenn man das Hyperboloid und den asymptotischen Kegel durch eine Meridianebene schneidet, die erstere Fläche nach einer Hyperbel und die letztere nach zwei Geraden geschnitten wird, die Asymptoten der Hyperbel sind.

Fig. 29b. 140. Ist A der Aequator und B die S_1 eines einmanteligen Drehungs-Hyperboloids, so wird dieses von A in zwei symmetrische Hälften getheilt, die wir dadurch unterscheiden wollen, daß wir die Hälfte, auf welcher die S_1 (B) liegt, den positiven (+) Mantel, den anderen den negativen (—) Mantel der Fläche nennen. Ebenso wollen wir die beiden Hälften (Mäntel) des asymp-

totischen Kegels (Ca), in welche dieser durch a getheilt wird, unterscheiden. Ferner wird jede Gerade D auf dem Hyp. durch den P(b), den sie mit dem Aequator gemein hat, jede Gerade der KF(Ca) durch den P(a), in zwei Theile getheilt, von denen die auf dem + Mantel liegende die + Ez, die dem — Mantel angehörige die — Ez genannt werden soll. Weiß man daher, daß der P(c) die S_1 der G(D) ist, so geht daraus hervor, daß **jeder P(d) der G(D), der mit c auf einer Seite von b liegt, dem + Mantel angehört.** Wir wollen ferner ein Mittel angeben, um die beiden Geraden, die durch jeden Punkt des Hyp. gelegt werden können, zu unterscheiden, und zu dem Ende, wie früher bei den WF zweiter Ordnung, die eine Gerade die Ez, die andere die SchL nennen. Ist d_1 der R_1 eines Punktes auf dem + Mantel unseres Hyp, so sind D_1 und E_1 die R_1 der beiden durch d möglichen Geraden des Hyp, und es sei D die Ez und daher E die SchL. Da der P(d) auf dem + Mantel des Hyp liegt, so ist damit bestimmt, wo die S_1 von D und E sich befinden, daß nemlich c und e diese S_1 sind. Denken wir uns nun im P(c), d. i. in der S_1 von D auf der T_1 in ihrem + Raume stehend und das Gesicht gegen die Achse des Hyp. gewendet, so liegt die G(D) links, während unter ähnlichen Umständen die G(E) zu unserer Rechten sich befindet. Denken wir uns mit den Geraden D und E um die Achse gedreht, so bleibt D links und E rechts liegen. Setzt man also fest, daß die links liegende Gerade die Ez heißt, so haben wir dadurch ein einfaches Mittel, die Ez und SchL von einander zu unterscheiden.

141. Die Meridiane einer OF sind **nicht** gleich. Suchen Fig. 30. wir aber, wie einer aus dem andern erhalten werden kann, und nehmen daher auf einem Meridiane B (von dem vorläufig blos seine E(B_1) gegeben ist), den P(c) in der Ellipse C an, so liegt c_1 offenbar im Schnitt von B_1 und C_1; suchen wir den P(d) von B in der Ellipse D (von welcher blos der R_2(D_2) gezeichnet ist), so liegt d_1 in B_1 und D_1. Da aber D_1 eine Ellipse ist, die wir nicht gerne zeichnen, so suchen wir die Zeichnung derselben auf folgende Art zu umgehen. Denken wir c_1 mit dem Scheitel b_1 der Ellipse C_1, und d_1 mit dem Scheitel e_1 der (nicht gezeichneten) Ellipse D_1 verbunden, so wird, wegen der Aehnlichkeit und homologen Lage der Ellipsen C_1 und D_1, $b_1c_1 \parallel d_1e_1$. Sucht man da-

her c_1 (aus e) und zieht $c_1d_1 \parallel b_1c_1$, so erhält man d_1, ohne die Ellipse D_1 gezeichnet zu haben. Daraus geht aber hervor, daß das Verhältniß von a_1d_1 zu a_1c_1 für alle Ellipsen ein unveränderliches ist. Betrachtet man nun die C (B_1) als T_3 und klappt sie so in die T_2, daß man sie um die Achse (a_1) dreht, bis sie mit der T_2 zusammenfällt, wodurch die Punkte c, d so nach c_3, d_3 kommen, daß $\overline{a_2c_3} = \overline{a_1c_1}$ und $\overline{f_2d_3} = \overline{a_1d_1}$ wird, so sieht man, daß sich verhält $\overline{a_2c_3} : \overline{a_2b_2} = \overline{f_2d_3} : \overline{f_2e_2}$. Man erhält demnach den R_3 (B_3), oder, was dasselbe ist, die wahre Gestalt eines Meridians (B), wenn man von den Punkten des Hauptschnitts Senkrechte $\overline{ab}$ auf die Achse fällt, und alle diese Senkrechten in dem nemlichen Verhältnisse (hier in dem Verhältniß $\overline{ac} : \overline{ab}$) verändert.

Läßt man nun B_3 liegen, dreht aber die C (A_1) mit dem Hauptschnitt A um die Achse der OF, bis das L_2 von b die T_2 in c_3 trifft, so muß auch wegen der obigen Proportion, das L_2 von e die T_2 in d_3 treffen, und ein ähnliches Resultat, für alle Punkte von A zum Vorschein kommen. Dann erscheint also der Meridian B als R_2 des Meridians A. Nennen wir nun zwei C, deren eine als Riß (Projection) der andern erscheinen kann, projectivische Curven, so haben wir den Satz:

Die Meridiane einer OF sind projectivische C.

Fig. 30. 142. Hat man wieder zwei Meridiane A und B einer OF $\left(A, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, und zieht man in e eine Tg (eg) an den Hauptschnitt A, so schneidet sie die Achse in einem P (g) (dessen R_1 in a_1 liegt). Denken wir uns nun die C (B_1) so gedreht, daß B als Riß von A betrachtet werden kann, und sehen sie in dieser Lage als T_3 an, so ist B der R_3 und A selbst der R_2 von A, demnach der P (d) der R_3 des P (e) und die Tg für B im P (d) der R_3 der Tg an A im P (e); man sieht demnach, daß sich diese beiden Tg im P (g) schneiden, da die Achse der OF die K' der T_2 und T_3 ist, und g ein Punkt der Tg (eg), also auch ihres R_3, d. i. der Tg in B im P (d) ist. Drehen wir nun die C (B_2) wieder zurück, bis sie ihre ursprüngliche Lage einnimmt, so ist immer noch der P (g) ein Punkt der Tg an B im P (e). Es folgt hieraus der Satz:

1) Legt man an zwei Meridiane einer OF Tg, deren Berührungspunkte auf einer Parallelellipse liegen, so gehen sie durch denselben Punkt der Achse. Hieraus folgt ferner:

2) Legt man in allen Punkten einer Parallelellipse einer OF Tg an die diesen Punkten entsprechenden Meridiane, so erhält man eine (die OF nach der Parallelellipse berührende) KF, deren Centrum in der Achse liegt, und

3) Legt man von einem Punkte der Achse einer OF eine Berührungs-KF an sie, so berührt diese noch eine Parallelellipse.

4) Liegt der P(g) in unendlicher Entfernung, d. h. sind die Tg parallel zur Achse der OF, so haben wir einen berührenden Cylinder; stehen die Tg senkrecht zur Achse, so haben wir eine berührende Ebene.

143. Zieht man in irgend einem Punkte des Meridians B eine Tg (E) an die durch diesen Punkt gehende Parallelellipse (C), so ist der R_1 (E_1) dieser Tg der Geraden B_1 zugeordnet (s. 53.), während ihr $R_2 \parallel K_2$ ist. Nimmt man nun auf B einen anderen Punkt an, der einer andern Ellipse angehört, so ist auch der R_1 ihrer Tg der B_1 zugeordnet, und der $R_2 \parallel K_2$. Hieraus folgen die Sätze:

1) Legt man in allen Punkten eines Meridians einer OF Tg an die durch diese Punkte gehenden Parallelellipsen, so bilden sie einen die OF nach diesem Meridian berührenden Cylinder, dessen Ez senkrecht zur Achse der OF stehen.

2) Legt man parallel zu einer auf der Achse einer OF senkrechten Geraden Tg an diese Fläche, so bilden sie eine CF, die die OF nach einem Meridian berührt.

144. Ist der Meridian einer OF eine C zweiter Ordnung, deren Achse mit der Achse der OF zusammenfällt, oder besteht der Meridian aus zwei mit der Achse parallelen oder sie schneidenden Geraden, so ist die OF zugleich eine Fläche zweiter Ordnung, und

trägt also alle Eigenschaften dieser Flächen an sich. Die wichtigsten dieser Eigenschaften sind folgende:

1) Eine Fläche zweiter Ordnung wird von jeder Ebene nach einer Linie zweiter Ordnung und von einer Geraden nach zwei Punkten geschnitten.

2) Parallele Ebenen schneiden eine Fläche zweiter Ordnung nach gleichnamigen Linien, die beziehungsweise parallele Achsen haben und deren Mittelpunkte in einer Geraden (Durchmesser) liegen, die man jeder der schneidenden Ebenen zugeordnet (conjugirt) nennt. Legt man durch den Punkt, in welchem die eben genannte Gerade die Fläche schneidet, eine Ebene parallel zu der obigen Ebene, so berührt sie die Fläche in diesem Punkte.

Schneiden die parallelen Ebenen nach Ellipsen, so haben diese gleiches Achsenverhältniß, nach Hyperbeln, so sind die Asymptoten der einen parallel zu denen der anderen.

3) Legt man durch einen Punkt oder parallel einer Geraden an eine Fläche zweiter Ordnung Tg, so bilden diese eine KF, oder beziehungsweise CF, die die Fläche zweiter Ordnung nach einer Linie zweiter Ordnung, also nach einer ebenen C, berührt. Hat man daher von dieser C drei Punkte, d. h. hat man die Berührungspunkte dreier Tg, so ist dadurch die Ebene der C bestimmt, und man erhält diese als Schnitt der Ebene mit der Fläche. Sind daher sämmtliche Tg der Fläche zweiter Ordnung senkrecht zur T_1, so sind sie parallel zu einander und bilden eine CF, die unsere Fläche nach einer Linie zweiter Ordnung berührt. Da aber diese Linie zugleich das Profil der Fläche ist, so sieht man, daß das PR_1 einer Fläche zweiter Ordnung eine Linie zweiter Ordnung ist.

4) Jede Fläche zweiter Ordnung, die zugleich eine OF ist, läßt zwei Systeme von parallelen Ebenen zu, die die OF nach Kreislinien schneiden.

Anm. Ist das Achsenverhältniß der Parallelellipsen einer OF = 1, so gehen diese Ellipsen in Kreise über und die OF in eine DF, und daher auch die OF zweiter Ordnung in eine DF zweiter Ordnung. Diese wird dann nur von zu ihrer Achse senkrechten Ebenen nach Kreisen geschnitten.

Fig. 31. 145. Außer denjenigen Flächen zweiter Ordnung, die OF (oder, wenn das Achsenverhältniß ihrer Parallelellipsen = 1 ist,

DF) sind, giebt es noch eine, welche entsteht, wenn eine unveränderliche Parabel sich so bewegt, daß ihr Scheitel eine feste Parabel A durchläuft, ihre Ebene auf der Ebene der A senkrecht bleibt und parallel fortrückt, und ihre Achse sich parallel fortbewegt in der Ebene der Parabel A und entgegengesetzt zur Richtung der Achse dieser Parabel. Lassen wir die T_2 parallel sein zur Ebene der A und nehmen wir ein $E(B_2)$ an, die A im $P(a)$ berührt, so sieht man leicht, daß der Schnitt der $E(B_2)$ mit unserer Fläche eine Linie zweiter Ordnung sein muß, die von a aus nach vier Richtungen geht und daher aus zwei sich schneidenden Geraden besteht, deren R_2 den R_2 der A berührt. Da man nun durch den R_2 eines jeden Punktes unserer Fläche zweiter Ordnung zwei Tg an A_2 legen kann, so sieht man, daß diese Fläche eine WF zweiter Ordnung ist. Es ist nun noch zu entscheiden, ob sie eine Leitebene hat oder nicht. Nun ist es aber leicht einzusehen, daß auf unserer Fläche keine Parallellinien möglich sind. Denn gäbe es solche, so müßten ihre R_2 parallel sein, was aber nicht möglich ist, da es an einer Parabel parallel zu einer Geraden nur eine Tg giebt. Wissen wir aber, daß auf dieser Fläche keine Gerade mit einer anderen parallel sein kann, so muß die WF zweiter Ordnung eine Leitebene haben und demnach ein windschiefes (hyperbolisches) Paraboloid sein (Anh. 12).

146. Sind ab, de zwei Ez einer windschiefen Schraubenfläche (A, a_1, α) (wo A eine Schraubenlinie, a_1 ihre zur T_1 senkrechte Achse und α den Winkel bezeichnet, den die Ez dieser WF mit ihrer Achse bilden, s. 96. Anm.), und schneiden diese Ez die $G(a_1)$ beziehungsweise in den Punkten a und d, die Schraubenlinie A in den Punkten b und e, so werden wir, wenn von den Punkten b und e auf die $G(a_1)$ die Senkrechten bc und ef*) gefällt werden, zwei rechtwinkelige Dreiecke abc, def erhalten, welche einen Winkel (α) und eine Seite ($\overline{bc} = \overline{ef}$) gleich haben, und demnach kongruent sind. Dann ist aber auch $\overline{ac} = \overline{df}$ und $\overline{cf} = \overline{ad}$. Hieraus geht folgender Satz hervor: Fig. 52.

1) Wenn wir eine Ez (ab) einer Schraubenfläche (A, a_1, α) zur Erzeugung dieser Fläche fortbewegen,

*) Jeder in dieser Nummer angeführter Punkt, von dem in unserer Figur blos der R_2 gezeichnet ist, hat seinen R_1 in a_1.

wobei der Punkt (b), nach welchem die Ez (ab) die Schraubenlinie (A) schneidet, auf dieser Schraubenlinie fortgeht, so nimmt der A_1 des P(a), nach welchem die Ez(ab) die G(a_1) schneidet, stets um eben so viel zu oder ab, als der A_1 des P(b), woraus ferner hervorgeht:

2) Die A_1 aller Punkte der Ez (ab) nehmen bei der Bewegung dieser Ez um gleich viel zu oder ab.

Da noch jeder Punkt g der Ez (ab) bei der Bewegung dieser Geraden gleich weit von der G (a_1) entfernt bleibt, und demnach der R_1 (g_1) dieses Punktes auf der aus a_1 beschriebenen Kreislinie B_1 sich bewegt, so folgt im Zusammenhange mit den obigen beiden Sätzen noch folgender Satz:

3) Alle Punkte der Ez(ab) beschreiben bei ihrer Bewegung Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe mit der gegebenen Schraubenlinie (A).

Anm. Aus dem Satz 1) geht ein einfaches Mittel hervor, aus der Ez (ab) eine zweite Ez (de) zu finden. Man darf die Punkte d und e in der G (a_1) und der C (A) nur so wählen, daß der A_1 von d den von a um eben so viel übertrifft, als der A_1 von e den von b, wobei wir voraussetzen, daß die Punkte a, b, d und e in dem positiven Raum der T_1 liegen. Um aber diejenige Ez, hier die Ez (ab), zu finden, die $\parallel T_2$ ist, darf man nur die G (ab) so zeichnen, daß $a_1b_1 \parallel K_1$ ist und a_2b_2 mit a_2c_2 den $\wedge\ \alpha$ bildet. Dies ist der Grund, warum wir die G (ab) $\parallel T_2$ angenommen haben; denn die drei Sätze, die wir eben entwickelt haben, gelten auch, wenn die Ez (ab) beliebig gewählt ist.

§. 12.

Aufgaben über TE und Tg an Flächen.

Fig. 32. •147. Aufg. Es ist gegeben eine KF (Aa) (Fig. a.) oder eine CF (A, $\parallel$ D) (Fig. b.) und auf ihr ein P (b); man sucht die TE an der Fläche in diesem Punkte.

Aufl. Zieht man durch b die Ez (B), so ist sie die Berührungserzeugende (127.) unserer TE. Da wir nun jeden Punkt dieser G (B) als Berührungspunkt der gesuchten TE ansehen können, so wollen wir den P (c), in welchem B und A sich schneiden, als solchen betrachten; denn in diesem Falle ist es leicht, eine

Tg der CF oder KF, die in der gesuchten TE liegt, zu zeichnen, da wir nur (nach 114. 1) im P(c) eine Tg (C) an die SchL legen dürfen. Es ist dann (s. 128.) die E(BC) die gesuchte TE.

148. Es ist gegeben eine CF (A_1) (s. 101.) und darauf ein Fig. 33.
P(a); man sucht die TE der CF für diesen Punkt.

Aufl. Da die gesuchte TE ∥ CF(A_1) ist, so ist sie auch ⊥ T_1, und ist demnach ihr R_1 eine G(B_1), die durch a_1 geht. Denkt man sich nun durch den P(a) eine E(A) auf der CF(A_1) gezogen, und an sie im P(a) eine Tg gelegt, so ist sie auch eine Tg der CF im P(a) und liegt demnach in der TE. Da aber der R_1 dieser Tg an A_1 berühren muß, so sieht man,

daß die TE an einer CF(A_1) in einem P(a) derselben eine LE_1 ist, deren R_1 den R_1(A_1) der CF im P(a_1) berührt.

149. Aufg. Durch einen P(b) an eine KF (Aa) eine TE Fig. 34.
zu legen.

Aufl. Da (nach 128. 2) die gesuchte TE auch durch den P(a) gehen muß, so enthält sie die G(ab), und wir brauchen nur noch eine Gerade unserer TE. Eine solche Gerade muß aber die G(ab) schneiden oder mit ihr parallel sein und außerdem die KF, also eine Linie derselben, berühren. Demnach müssen wir an eine Linie der KF, z. B. an die Linie A, eine Tg(B) legen, welche mit der G(ab) in einer Ebene liegt. Um diese Tg leicht finden zu können, ist es nothwendig, daß die Linie A in einer Ebene liegt, und ist es dann bequem, eine Tafel, z. B. die T_2, so zu wählen, daß sie auf der Ebene der Linie A senkrecht steht. Dann liegt die Tg(B) in der E(A_2) und es ist G(B) ∥ G(ab), wenn (Fig. a.) G(ab) ∥ E(A_2), dagegen G(B) ╳ G(ab), wenn (wie in Fig. b.) G(ab) ╳ E(A_2) (hier im P(c)). Demnach erhalten wir unter der Voraussetzung, daß die Linie A in einer Ebene liegt, folgende Auflösung:

Man sucht den Durchschnittspunkt c der G(ab) mit der Ebene der Linie A und zieht durch c eine Tg B an A, oder, wenn G(ab) ∥ Ebene der Linie A ist, legt man an A eine Tg B ∥ G(ab), so ist in beiden Fällen E(Ba) die gesuchte TE. Zieht man noch durch den P(d), in welchem A von B berührt wird, die Ez(ad), so ist diese die Berührungs-Ez.

Anm. 1. So viel durch P(c) oder || G(ab) an die Linie A Tg gelegt werden können, so viel TE sind möglich. In unseren Figuren giebt es außer der TE(Ba) noch eine TE(Ca). Gäbe es vom P(c) keine Tg an A, so gäbe es auch keine TE. Läge aber der P(c) in A, so wäre cb eine Erzeugende und b läge daher auf der KF selbst. In diesem Falle gäbe es aber auch, wenn A eine Linie zweiter Ordnung ist, durch c nur eine Tg an A, also auch nur eine TE an die KF(Aa), deren Berührungs-Ez die G(bc) wäre.

Anm. 2. Wäre A eine unebene Curve, so würden wir uns eine ebene Schneidlinie suchen, indem wir den Durchschnitt der KF (Aa) mit einer auf der T_2 senkrechten Ebene (mit später anzugebenden Mitteln) aufsuchen, diese Schnittlinie als Schneidlinie der KF ansehen, und dann wie oben verfahren.

150. Soll durch einen P(b) an eine CF(A, || E) eine TE gelegt werden, so muß diese, weil sie zu den Ez der CF parallel ist (128. 1)), eine Gerade F enthalten, die durch P(b) geht und || E ist. Die weitere Entwickelung (die wir nebst der Ausführung der Zeichnung dem Schüler überlassen wollen) und alles, was sich darüber bemerken läßt, stimmt vollkommen mit dem in voriger Nummer für die KF'Gesagten überein; nur kann F nicht parallel zur Ebene von A werden.

Hat man eine CF(A_1), so ist (148.) die gesuchte TE eine E(B_1), deren R_1(B_1) der R_1(A_1) den CF berührt. Damit aber die E(B_1) durch b geht, muß B_1 durch b_1 gehen. Auch hier giebt es so viele TE, als durch b_1 an A_1 Tg möglich sind.

151. Aufg. Es ist gegeben eine KF(A, a) und eine G(B); man soll an die KF eine TE legen, die || G(B) ist.

Aufl. Der gesuchten TE muß, weil sie auch den P(a) enthält, eine G(C) angehören, welche durch a geht und || G(B) ist. Hat man diese Gerade, so hat man, um zum Resultat zu gelangen, dasselbe zu thun, wie oben (149.), nachdem man die G(B) erhalten hatte.

Fig. 35. 152. Aufg. Es ist gegeben eine CF(A, || B) und eine G(C); gesucht eine TE der CF, die || G(C) ist.

Aufl. Da unsere TE auch || G(B) sein muß (128. 1), so muß sie parallel zu jeder Ebene sein, die parallel zu B und C ist. Nimmt man daher einen P(a) an und legt dadurch eine Paral-

lele zu B und eine zu C (am Besten, wie in unserer Figur, so, daß von den 4 Rissen der zwei Parallelen schon 3 gezeichnet sind), so ist die Ebene dieser Parallelen, hier die E (CD) || TE. Suchen wir nun wieder eine Gerade der TE, d. h. eine Tg zur EF, so muß sie || E (CD), und, wenn wir diese Tg an A berühren lassen und die Linie A eben ist, in der Ebene von A liegen, also auch parallel zu dieser Ebene sein. Suchen wir daher den Durchschnitt bc der E (CD) mit der E (A_2), so ist bc parallel zur gesuchten Tg (E). Zieht man noch durch den P (d), in welchem A von E berührt wird, eine G (F) || G (B), so ist diese die Berührungs-Ez und E (EF) die gesuchte Tg.

Anm. 1. Auch hier giebt es so viel TE, als es an A Tg || E giebt. Ebenso werden wir auch hier eine ebene Schneidlinie der EF uns suchen, wenn A eine unebene Curve ist.

Anm. 2. Soll die TE senkrecht zu einer gegebenen Ebene sein, so wäre sie parallel zu einer auf dieser Ebene senkrechten Geraden.

153. Aufg. 1. Es ist gegeben eine EF und ein P (a); man soll durch diesen Punkt eine TE an die EF legen.

Aufl. Um eine Gerade der TE zu erhalten, muß man durch a eine Tg an die EF legen. Demnach nimmt man am zweckmäßigsten eine Ebene an, die durch den P (a) geht und auf einer Tafel senkrecht steht und sucht den Durchschnitt A dieser Ebene mit der EF (wie man einen solchen Durchschnitt findet, wird später gezeigt werden), so ist eine durch a gehende Tangente B an A eine Gerade der TE. Zieht man noch durch den Punkt, in welchem sich B und A berühren, die Ez (C) der Fläche, so ist E (BC) die gesuchte TE. Es giebt dann wieder so viele TE, als es durch a an A Tg giebt.

Aufg. 2. Es ist gegeben eine EF und eine G (A); gesucht eine TE der EF, die || G (A) ist.

Aufl. Da hier die Tangente der EF, welche in der TE liegt, || G (A) sein muß, so nehmen wir hier eine Ebene an, die || G (A) und die zugleich, der Einfachheit wegen, auf der T_1 senkrecht steht, und verfahren außerdem wie in Aufg. 1.

154. Es kann noch verlangt werden, daß eine TE an einer EF (worunter bekanntlich auch die KF und EF gehört) 1) eine G (ab) enthält, 2) parallel einer E (AB) oder ⊥ G (C) ist.

ad 1. Da schon durch den P (a) die TE fast bestimmt ist, so wird eine TE durch die G (ab) nur dann möglich sein, wenn unter den TE, die durch den P(a) möglich sind, eine ist, die auch den P(b) enthält. Giebt es eine solche, so ist sie die gesuchte TE, wo nicht, so ist die Aufgabe unmöglich.

ad 2. Aus ähnlichen Gründen, wie vorhin, werden wir hier suchen eine TE || G(A) und nachsehen, ob es unter den nach dieser Bedingung möglichen TE eine giebt, die auch || G (B) ist. Ist dies der Fall, so hat man zugleich die gesuchte TE; wo nicht, so ist die Aufgabe unmöglich.

ad 3. Damit die gesuchte Ebene ⊥ G(C), muß sie zu einer E(AB), die ⊥ G(C) ist, parallel sein. Hat man die E(AB), so ist man auf den Fall 2) zurückgeführt.

155. Aufg. Es ist gegeben irgend eine EF; gesucht eine Tg dieser Fläche, welche entweder

1) durch einen P(a) geht,
2) in einer Ebene liegt,
3) || G(A),
4) || E(BC),
5) ⊥ G(D) oder
6) ⊥ E(abc) ist.

Aufl. Da (nach 127. 2)) jede Gerade in einer TE einer EF, die nicht parallel einer Berührungs-Ez ist, eine Tg der Fläche ist, so erhält man die gesuchte Tg.

ad 1. wenn man durch P(a) alle möglichen TE an die EF legt; jede in diesen TE liegende Gerade, die den P(a) enthält und nicht parallel zur Berührungs-Ez ist, ist eine gesuchte Tg. Die Berührungspunkte dieser Tg liegen daher in den Berührungs-Ez der möglichen TE.

ad 2. Die Aufgabe ist nur dann möglich, wenn die gegebene Ebene eine TE ist. In diesem Falle ist jede Gerade in ihr, die nicht parallel zu ihrer Berührungs-Ez ist, eine gesuchte Tg, und die Berührungs-Ez selbst enthält alle Berührungspunkte dieser Tg.

ad 3. Hier liegen sämmtliche Tg in den || G(A) möglichen TE und die Berührungs-Ez dieser Ebenen enthalten sämmtliche Berührungspunkte der Tg.

ad 4. Nimmt man auf der EF einen beliebigen Punkt a an und betrachtet ihn als Berührungspunkt einer Tg der EF, so giebt es un-

zählig viele Tg für den P(a), die alle in der dem P(a) entsprechenden TE der EF liegen. Soll nun unsere Tg ‖ E(BC) sein, so ist der Durchschnitt der genannten TE mit einer Ebene, die durch a geht und ‖ E(BC) ist. Es giebt also im vorliegenden Falle für jeden Punkt der EF eine Tg.

ad 5. Die gesuchte Tg muß zu einer auf der G(D) senkrechten Ebene parallel sein. Hat man daher eine E(BC) gesucht, die ⊥ G(D) ist, so hat man den Fall 4).

ad 6. Die gesuchte Tg muß parallel zu einer G (A) sein, die ⊥ E(abc) ist. Hat man die G (A) gefunden, so ist man im Falle 3).

156. Soll eine N einer EF gefunden werden, die ⊥ G (A) ist, so denke man sich diese N gefunden, und durch ihren Fußpunkt a eine Parallele zur G(A) gelegt, welche also eine Tg der Fläche für den P (a) ist. Demnach ist der Fußpunkt der gesuchten N zugleich der Berührungspunkt einer mit der G (A) parallelen Tg. Legt man also an die EF eine TE ‖ G(A), so enthält ihre Berührungs-Ez die Fußpunkte der gesuchten N. Soll die gesuchte N ‖ E(abc) sein, so muß sie auch senkrecht zu einer G (A) sein, die ⊥ E(abc) ist. Hat man dann die G(A), so hat man wieder zu suchen ein N ⊥ G (A).

157. Aufg. Es ist gegeben ein Drehungskegel durch seinen Halbmeridian A (s. 93. und 105.); man soll an ihn eine TE legen, die durch den P(b) geht. Fig. 36.

Aufl. Man nehme als Schneidlinie der KF einen Parallelkreis, dessen Ebene den P(b) enthält. Lassen wir diese Ebene die T_1 sein, so geht die K_2 durch b_2 und der Parallelkreis B, welcher die Schneidlinie der gegebenen KF vorstellt, ist dann die erste Spur (S_1) der KF. Zieht man nun durch b an B eine Tg C, so ist diese eine Gerade der TE und da C in der T_1 liegt, so ist es zugleich die S_1 der TE. Legt man noch durch den P(c), in welchem B von C berührt wird, eine gerade Ez D der KF, so ist sie die Berührungs-Ez und E (CD) die gesuchte TE. Wenn nun, wie in unserer Figur, der N_2 des Kegelcentrums über die Grenzen der T_2 hinausfällt, so kann man nur D_1 unmittelbar zeichnen. Will man, ohne die T_2 zu verlängern, D_2 erhalten, so kann man sich dadurch helfen, daß man den P(d) sucht, in welchem die G(D) den beliebig angenommenen Parallelkreis E schnei-

det. Der $\mathfrak{R}_1 (d_1)$ dieses Punktes ist der Schnitt von D_1 und E_1, der $\mathfrak{R}_2 (d_2)$ liegt im $\mathfrak{KL}_2$ des $\mathfrak{P}$(d) und in E_2.

Anm. Es giebt in unserer Figur noch eine TE, da von b aus noch eine Tg an die $\mathfrak{S}_1$ der KF möglich ist. Läge der $\mathfrak{P}$(b) in B (also auf der KF(A) selbst), so gäbe es nur eine TE und läge b_1 innerhalb B_1, so daß von b_1 aus keine Tg an B_1 möglich wäre, so gäbe es auch keine TE.

Fig. 37. 158. Aufg. Es ist gegeben ein Drehungskegel durch seinen Halbmeridian A; man soll an ihn eine TE legen, die || G(B) ist.

Aufl. Betrachten wir wieder einen Parallelkreis C als Schneidlinie und zugleich als $\mathfrak{S}_1$ des Kegels. Liegt nun wieder, wie in unserer Figur, der $\mathfrak{R}_2$ des Centrums außerhalb der Grenzen der $\mathfrak{T}_2$, so können wir von der früher (151.) für die vorliegende Aufgabe gegebene Auflösung hier keinen Gebrauch machen. Wir verfahren daher folgendermaßen. Man denkt sich die TE nebst ihrer Berührungs-Ez nach Nr. 151. aufgesucht, und diese nebst dem Kegel so verschoben, daß seine Achse mit der des gegebenen Kegels zusammenfällt, sein Centrum der $\mathfrak{P}$ (a) wird (dessen $\mathfrak{R}_2$ (a_2) innerhalb der Grenzen der $\mathfrak{T}_2$ erscheint), und seine Ez mit denen des gegebenen Kegels beziehungsweise parallel bleiben, so daß D sein Halbmeridian ist. Dann kommt die durch das Centrum des Kegels A gelegte Parallele zu B nach E. Betrachtet man nun die $\mathfrak{T}_1$ als Ebene der Schneidlinie des verschobenen Kegels, und demnach den Parallelkreis F als seine Schneidlinie und $\mathfrak{S}_1$, so ist (nach 151.) G (ab) die Berührungs-Ez. Denkt man sich nun den Kegel wieder in seine frühere Lage zurückgeschoben, so wird die gesuchte Berührungs-Ez (G) des gegebenen Kegels || G (ab) sein, und demnach G_1 mit $a_1 b_1$ zusammenfallen. Um G_2 zu finden, kann man so verfahren, wie für D_2 in der vorhergehenden Nummer; es muß dann zugleich $G_2 \parallel a_2 b_2$ werden. Man sieht hieraus

> daß, um den $\mathfrak{R}_1$ (G_1) der gesuchten Berührungserzeugenden zu erhalten, die verschobene KF(D) statt der gegebenen KF (A) genommen werden darf.

Anm. Es giebt auch hier in unserer Figur zwei TE, da es von der $\mathfrak{S}_1$ (c) der G (E) an die $\mathfrak{S}_1$ (F) der verschobenen KF (D) noch eine Tg giebt. Es könnte auch kommen, daß die

vorliegende Aufgabe unmöglich wäre, wenn c_1 innerhalb F_1 läge, so daß von c an F keine Tg gezogen werden könnte. Liegt endlich zufällig c_1 in F_1 (also auch E auf der KF(D) selbst), so giebt es eine Tg durch c an F, also auch eine TE, deren Berührungs-Ez die G(ac) ist.

159. Aufg. Durch einen P(b) eine TE an eine DF(A) Fig. 38.
zu legen, deren Berührungspunkt auf einem gegebenen Parallelkreis B liegt.

Aufl. Nimmt man eine Drehungs-KF(C) so an, daß C und A sich in dem P(c) des Parallelkreises B berühren, so berühren sich (134. 3)) die KF(C) und die DF(A) nach dem Parallelkreis B. Legt man daher durch P(b) eine TE an die DF (C), so ist sie zugleich TE an der DF(A) und zwar in dem Punkte d, nach welchem der Parallelkreis B von der Berührungs-Ez der TE geschnitten wird. Hat man nun (nach 157.) den N_1 (D_1) der Berührungs-Ez D der TE gefunden (D_2 läßt sich, wenn, wie in unserer Figur, der N_2 des Kegelcentrums über die Grenzen der T_2 fällt, nicht unmittelbar finden, sondern nur auf die in 157. angegebene Art), so ist noch ihr Durchschnitt d mit B aufzusuchen. Da aber nur ein solcher Schnittpunkt vorhanden ist, während sich B_1 und D_1 nach zwei Punkten schneiden, so ist noch anzugeben, welcher von diesen Punkten d_1 ist. Zu dem Ende wollen wir (in dieser und der folgenden Nr.) denjenigen Kegelmantel (91.), der die T_1 schneidet, dessen N_2 also die K_2 schneidet, positiv (+), den andern negativ (—) nennen. Ebenso soll derjenige Theil einer beliebigen geraden Ez des Kegels, der auf dem + Mantel liegt (der also die T_1 schneidet), positiv, der andere negativ heißen. Liegt daher, wie in unserer Figur, der Parallelkreis B, also auch der gesuchte Berührungspunkt d auf dem + Mantel, so liegt auch d_1 auf dem N_1 der + Ez D, wo hingegen d_1 auf dem N_1 der — Ez D liegt, wenn B auf dem — Mantel sich befindet. Da aber der P(e), (in welchem die S_1 der TE und die S_1 des Kegels sich berühren) die S_1 von D ist, also auf der + Ez D liegt, so sieht man leicht, daß a_1 die D_1 in zwei Theile theilt, von denen der durch e_1 gehende die N_1 der + Ez D, der andere (nicht durch e_1 gehende) der N_1 der — Ez D ist.

Wenn also B auf dem + Mantel liegt, so müssen d_1 und e_1 auf einer Seite von a_1, wenn auf dem

— Mantel, auf verschiedenen Seiten desselben liegen.

Anm. 1. Es giebt in unseren Figuren durch den P (b) noch eine TE an die KF (C) (s. 159. Anm.), also auch an die DF (A). Es könnte auch unsere Aufgabe unmöglich sein; endlich giebt es dann nur eine einzige TE, wenn die S_1 der KF (C) durch den P (b) geht. In diesem Falle ist zugleich G (ab) die Berührungs-Ez der TE der KF (C).

Anm. 2. Es kann der Parallelkreis B ein Aequator sein, so daß die Tg C parallel zur Achse der DF wird. In diesem Falle haben wir statt der KF (C) eine EF $\perp$ T_1, deren R_1 daher B_1 ist. Ist B so beschaffen, daß G (C) senkrecht zur Achse ist, also statt der KF (C) eine Ebene erhalten wird, so ist diese TE natürlich nur dann möglich, wenn P (b) in der E (C_2) liegt, und in diesem Falle berührt diese E (C_2), welches die TE ist, die DF (A) nach einem Parallelkreis (Polarkreis, 134. 2)).

Anm. 3. Es kann noch vorkommen, daß die KF (C) ihr Centrum in der T_1 hat, daß also die S_1 der KF in a_1 liegt. In diesem Falle ist nicht ausgesprochen, welches der + oder — Mantel ist, weil die S_1 der KF (C) auf beiden Mänteln liegt. Betrachtet man in diesem Falle den Parallelkreis B als Schneidlinie unserer KF, und legt an B Tg || G (ab), so berühren sie B in den gesuchten Berührungspunkten (149.). Man erhält also hier die R_1 der Berührungspunkte, indem man in der T_1 durch a_1 eine Senkrechte zu a_1b_1 zieht und diese durch den R_1 von B_1 durchschneidet.

Fig. 39. 160. Aufg. An eine DF (A) eine TE zu legen, deren Berührungspunkt auf einem gegebenen Parallelkreis B liegt, und die || G (C) ist.

Aufl. Wir nehmen hier wieder eine Drehungs-KF (D) zu Hilfe, die die DF (A) nach B berührt, und suchen (nach 158.) den R_1 (E_1) der Berührungs-Ez der zur G (C) parallelen TE der KF, indem wir die KF (D) (nebst dem darauf liegenden Parallelkreis B) parallel verschieben, bis sein Centrum nach a kommt. Wo nun E_1 von B_1 geschnitten wird, ist der R_1 des gesuchten Berührungspunktes b (da nach 158. die R_1 aller Punkte des Kegels durch seine Parallelverschiebung ihre Lage nicht ändern). Da nun leicht einzusehen ist, daß durch Verschiebung des Kegels

der Parallelkreis B in unserer Figur auf den — Mantel des verschobenen Kegels kommt, so liegt b_1 auf dem $\mathfrak{R}_1$ der — Ez (E).

Anm. 1. Es giebt in unserer Figur an die KF (D), also auch an die DF (A), zwei TE || G (C); es kann auch die TE unmöglich werden, kann aber auch der besondere Fall eintreten, daß nur eine einzige TE möglich ist (s. 158. Anm.). In letzterem Falle geht die S_1 (F) der verschobenen KF durch die S_1 (c) der G (G), welche durch das Centrum a der verschobenen KF geht und || G (C) ist; es fällt daher E_1 mit G_1 zusammen.

Anm. 2. Es kann der Parallelkreis B auch hier ein Aequator sein; in diesem Falle haben wir eine CF (B_1) statt der KF (D), den wir nicht verschieben brauchen. Die TE hat dann (s. 128.) zum $\mathfrak{R}_1$ eine Gerade, die || C_1 ist und den $\mathfrak{R}_1$ (B_1) der CF berührt, und zwar in einem Punkte, der der $\mathfrak{R}_1$ der Berührungs-Ez, also auch der $\mathfrak{R}_1$ des Berührungspunktes der TE ist. Ferner könnte auch hier die KF (D) in eine Ebene übergehen, welche die DF nach B berührt, in welchem Falle die TE, welche dann mit dieser Ebene und mit der E (B_2) des Parallelkreises B zusammenfiele, nur dann möglich wäre, wenn die G (C) || E (B_2), also auch || T_1 wäre.

161. Aufg. An eine DF (A) eine TE zu legen, wenn der Berührungspunkt b derselben gegeben ist. Fig. 40.

Aufl. 1. Wir nehmen hier wieder eine DKF (C) zu Hilfe (die wieder in besonderen Fällen in eine CF oder in eine Ebene übergehen kann), welche die DF nach dem Parallelkreis B berührt, der durch den Berührungspunkt geht, und legen an diesen eine TE (DE), die nach b berührt, so ist diese die verlangte TE.

Aufl. 2. Ist der Berührungspunkt der gesuchten TE der P (c), welcher auf dem Hauptmeridian liegt, so wird man sich leicht überzeugen, daß die Gerade, welche im P (c) den Parallelkreis B berührt, senkrecht zur T_2 steht, daß demnach die gesuchte TE $\perp$ T_2 ist und C_2 zum $\mathfrak{R}_2$ hat.

162. Aufg. Durch einen P (b) eine TE an eine DF (A) zu legen. Fig. 41.

Aufl. Nimmt man einen beliebigen Parallelkreis an und verlangt, daß der Berührungspunkt der TE auf ihm liege, so kann man die Berührungspunkte dieser TE nach Nr. 159. finden (wobei wir wie dort die T_1 so annehmen, daß der P (b) in ihr liegt).

Es giebt dann für irgend einen Parallelkreis entweder zwei oder eine oder keine TE. Setzen wir nnn voraus, es gebe auf unserer DF(A) Kreise, für welche die gesuchte TE unmöglich ist und solche, für welche es zwei giebt, und denken uns von den ersteren Kreisen zu den letzteren fortgehend, so wird der erste Kreis, bei welchem die Aufgabe möglich ist, der (B oder C) sein, für welchen die S_1 des nach ihm berührenden Kegels durch b_1 geht, und der daher nur eine TE zuläßt. Diesen Kreis wollen wir, weil er die Grenze bildet zwischen den Kreisen, für welche die gegebene Aufgabe möglich, und denen, für welche sie es nicht ist, Grenzkreis, die nach ihm berührende KF Grenz-KF, den auf ihm liegenden Berührungspunkt (hier c oder d) Grenzpunkt nennen. Gehen wir nun von diesem Kreis in der oben angegebenen Richtung weiter fort, bis wir wieder auf eine Grenze kommen, so wird es bis dorthin aus b_1 an die S_1 der entsprechenden KF zwei Tg geben. Hätten wir aber keine Grenzen finden können, so würde daraus folgen, daß die gesuchte TE entweder für alle oder für keinen Parallelkreis möglich ist, worüber man dadurch Aufschluß erhielte, daß man für einen beliebigen Parallelkreis die TE suchte. Die vorliegende Aufgabe ist demnach entweder unmöglich oder es giebt für jeden Parallelkreis TE, oder für jeden der zwischen gewissen Grenzen liegt. Wenn also die Aufgabe möglich ist, so erhalten wir unzählige TE, welche, da sie alle durch den P(a) gehen (nach 117. 2)), eine KF umhüllen, und unzählige Berührungspunkte, welche zusammen eine Curve geben, nach der diese KF die DF berührt. Haben wir diese Curve, so ist damit auch die KF bestimmt. Um aber diese Curve zu erhalten, suchen wir so viele Punkte derselben, daß wir ihre Risse verbinden können, und fangen damit an, diejenigen Punkte zuerst zu suchen, welche besonders Interesse für uns haben. Zu diesen gehören vor Allem die oben genannten Grenzpunkte, deren Auffindung wir schon angegeben haben. Außer diesen haben die Punkte, welche auf dem ersten, zweiten Profil d. h. auf dem Aequator, auf dem Hauptmeridian und dem Polarkreis liegen. Denn da das zweite Profil der Fläche die Grenze ist zwischen dem für die T_2 sichtbaren und unsichtbaren Theil der DF, so werden die R_2 dieser Profilpunkte die Grenze abgeben zwischen dem Theil des R_2 unserer gesuchten Berührungslinie, der zusammenhängend gezogen, und dem Theil, der gestrichelt wird;

ähnlich verhält es sich mit den zweiten Profilpunkten unserer C und mit den Profilpunkten einer jeden auf einer DF liegenden C. Will man nun die ersten Profilpunkte finden, so dürfen wir nur verlangen, daß der Berührungspunkt der gesuchten TC auf dem Aequator liege (159. Anm. 2)). Haben wir aber die zweiten Profilpunkte zu finden, soll also der Berührungspunkt auf dem Hauptmeridian liegen, so bekommen wir (nach 161. Aufl. 2)) die R_2 dieser Punkte (e, f), wenn wir von b_2 Tg an A_2 legen. Haben wir diese besonderen Punkte gefunden, so suchen wir noch so viele Punkte, als wir nöthig zu haben glauben, um die Risse der C zeichnen zu können. Um nun solche Punkte zu erhalten, nehmen wir innerhalb der gefundenen Grenzen Parallelkreise an und suchen (nach 159.) die auf ihnen möglichen Berührungspunkte von TC an der DF, die durch den gegebenen Punkt b gehen.

Anm. 1. Verbindet man den Berührungspunkt einer unserer TC mit dem P (b) durch eine Gerade, so ist sie die einzige Tg, die durch b in dieser TC an die DF (A) möglich ist. Es giebt also durch b an die DF (A) eben so viele Tg als TC, und die Berührungspunkte beider fallen zusammen. Es bilden also die unzähligen Tg, welche durch b an die DF (A) möglich sind, eine KF, welche die DF nach derselben Linie berührt, welche alle Berührungspunkte der durch b an die DF (A) möglichen TC enthält. Wir können demnach unserer vorliegenden Aufg. noch folgende Titel geben:

1) durch den P (b) eine Tg oder

2) eine berührende KF an die DF (A) zu legen.

Anm. 2. Ist die gegebene DF zweiter Ordnung, dann ist die gesuchte Berührungs-C eben (s. 144. 3)) und man braucht blos 3 Punkte (am besten Profilpunkte) derselben suchen, um die Ebene der C zu erhalten. Hat man diese, so braucht man nur noch (nach später entwickelten Gesetzen) den Durchschnitt der Ebene der C mit der DF suchen. Nimmt man dabei die T_2 so an, daß die $K_1 \parallel a_1 b_1$ wird, so steht die Ebene der C senkrecht zur T_2, und man hat dann nur die R_2 von zwei Punkten der C (am besten der zweiten Profilpunkte) zu suchen.

Liegt der P (b) in der Achse der DF, so ist immer die gesuchte C ein Parallelkreis.

Fig. 42. 163. Aufg. An eine DF (A) eine TE zu legen, die einer gegebenen G (B) parallel ist.

Aufl. Durch ähnliche Betrachtung wie in der vorigen Nr. geleitet, suchen wir auch hier die Grenzkreise, d. h. die Kreise auf, für welche es nur eine TE ∥ G (B) giebt, die ∥ G (B) ist. Nehmen wir nun an, wir verschieben die nach einem Parallelkreise berührende KF parallel, bis ihr Centrum in a liegt (s. 160.), so müssen wir, um an sie eine TE ∥ G (B) zu legen, durch a eine G (C) ∥ G (B) ziehen, und von der S_1 (b) der G (C) eine Tg an die S_1 der genannten berührenden KF legen. Da wir aber verlangen, daß nur eine solche Tg möglich sein soll, so muß die S_1 unseres Grenzkegels nach dessen Verschiebung durch b gehen und demnach ac sein Halbmeridian sein. Suchen wir nun die Lage dieses Kegels vor seiner Verschiebung, indem wir ihn so zeichnen, daß sein Halbmeridian den der DF (A) berührt und mit der G (ac) parallel ist, so erhalten wir hier vier Kreise, welche die Grenzpunkte 1, 2, 3, 4 enthalten. Nehmen wir die Kreise, welche das erste Profil bilden, so bekommen wir (160. Anm. 2.) die ersten Profilpunkte 5, 6, 7, 8; suchen wir aber die zweiten Profilpunkte, so müssen wir ∥ B (nach 161. Aufl. 2)) an die DF (A) eine TE legen, deren Berührpunkt im Hauptmeridian A liegt, und wir erhalten demnach die R_2 dieser Punkte (9, 10, 11, 12), wenn wir an den UR_2 unserer Fläche Tg legen, die ∥ B_2 sind. Nimmt man noch andere Parallelkreise und sucht die TE an der DF (A), deren Berührungspunkte auf diesen Parallelkreisen liegen, so kann man so viele Punkte der gesuchten Berührungscurve finden, als man nöthig zu haben glaubt. Wenn man dann hier die gefundenen Punkte verbindet, so wird man finden, daß es zwei C sind, in denen die Berührungspunkte unserer TE liegen.

Anm. 1. Aus ganz ähnlichen Gründen wie in der vorigen Nr. ergiebt sich, daß die vorliegende Aufgabe auch folgende Titel führen kann:

1) an die DF (A) eine Tg zu legen, die ∥ G (B) ist, oder
2) ∥ G (B) eine berührende CF an die DF (A) zu legen.

Anm. 2. Wenn man in den Figuren 41. und 42. die T_2 so wählt, daß die K_1 ∥ $a_1 b_1$ ist, so wird man leicht erkennen, daß in diesem Falle die beiden in einem Parallelkreis liegenden Punkte der gesuchten C einen gemeinschaftlichen R_2 haben. Ist dann noch

die E eben, wie dies stets der Fall ist, wenn die gegebene DF (A) zweiter Ordnung ist (s. 144. 3)), so steht die Ebene der gesuchten E ⊥ T_2, und man braucht blos die R_2 zweier Punkte derselben (am besten ihrer zweiten Profilpunkte), zu suchen, um diese Ebene zu bestimmen. Sucht man noch den Schnitt dieser Ebene mit der DF, so hat man die verlangte E.

Anm. 3. Ist die gegebene Gerade senkrecht zu einer Tafel, so erhält man (s. 83. u. 84.) ein Profil der DF und zwar, wenn ⊥ T_1, einen Aequator, wenn ⊥ T_2, den Hauptmeridian und den Polarkreis.

164. a. Aufg. An eine DF (A) eine TE zu legen, die parallel einer E (abc) ist. Fig. 43.

Aufl. Denkt man sich die TE und ihren Berührungspunkt d gefunden, und legt man durch d eine Meridianebene, so steht diese auf der TE, folglich auch auf der E (abc) senkrecht und schneidet die TE und die E (abc) nach zwei parallelen Geraden, von denen die erstere den Meridian des P (d) in diesem Punkte berührt. Demnach findet man den gesuchten P (d), wenn man die Meridianebene der DF (A) sucht, welche ⊥ E (abc) ist, den Schnitt dieser Meridianebene mit der E (abc) zeichnet und an den Meridian parallel zu diesem Schnitt eine Tg legt; der P (d), in welchem diese den Meridian berührt, ist der gesuchte Punkt. Um aber diese Operationen auszuführen, müssen wir die Risse des Meridians zeichnen. Hat man es nun mit dem Hauptmeridian zu thun (ein Fall, der eintritt, wenn die E (abc) ⊥ T_2 ist), so sind dessen Risse schon gezeichnet. Kommt man aber auf einen anderen Meridian, so vermeidet man die Construction seines R_2, indem man eine T_3 zu Hilfe nimmt, die mit der Ebene des Meridians parallel ist oder zusammenfällt, und klappt diese T_3 so um, daß der R_3 des Hauptmeridians für die T_3, auf den R_2 des Hauptmeridians für die T_2 fällt, was natürlich angeht, da die Meridiane der DF (A) kongruente E sind. — Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wollen wir mittelst der vorliegenden Zeichnung die aufeinander folgenden Operationen auseinandersetzen.

Wir suchen vor Allem die Meridianebene, auf welcher der gesuchte Berührungspunkt liegt. Diese Ebene steht senkrecht auf der E (abc), aber auch (weil die Achse der DF (A) ⊥ T_1 ist), senkrecht auf der T_1, folglich senkrecht auf der S_1 (B) der E (abc);

es ist demnach C_1 der $\mathfrak{R}_1$ der Meridianebene. Nun benutzen wir zu den weiteren Operationen ein S (1, 3), dessen $\mathfrak{T}_3$ die E(C_1) ist, und klappen diese so um, daß die $\mathfrak{K}'_3$ auf die $\mathfrak{K}_2$ und der $\mathfrak{R}_3$ der Achse der DF (A) auf den $\mathfrak{R}_2$ dieser Achse fällt, dann kommt der $\mathfrak{R}_3$ eines Pols (oder Polarkreises) auf seinen $\mathfrak{R}_2$ zu liegen, folglich fällt der $\mathfrak{R}_3$ (C_3) des neuen Hauptmeridians C auf den $\mathfrak{R}_2$ des alten Hauptmeridians A. Sucht man noch den $\mathfrak{R}_3$ ($a_3 b_3$) der E (abc) und zieht parallel damit eine Tg D_3 an C_3, so ist der P(d_3), in welchem sie C_3 berührt, der $\mathfrak{R}_3$ des gesuchten Punktes. Zieht man noch das KL$_3'$ dieses Punktes und macht $f_1 d_1 = f_2 b'_3$, so erhält man d_1 und daraus, indem man die $O_2 = O'_3$ macht d_2. In ähnlicher Art ist hier noch ein P(e) zu erhalten.

Will man nicht blos den Berührungspunkt der TE, sondern auch diese selbst bestimmen, so ist am besten, die S_1 dieser TE zu suchen, da sie leicht zu erhalten ist. Sie muß nemlich durch den P(g) gehen (dessen $\mathfrak{R}_3$ in D_3 und $\mathfrak{K}'_3$ liegt), und zur S_1 (B) der E (abc) parallel laufen; sie ist demnach die G (E). Weil nun aber der P (d) ebenfalls in der TE liegt, so ist E(Ed) die verlangte TE.

164. b. Aufg. Durch eine G (B) eine TE an eine DF zu legen.

Aufl. Die TE enthält die G(B), wenn sie entweder zwei Punkte mit ihr gemein hat, oder wenn sie durch einen ihrer Punkte geht und eine Gerade enthält, die || G (B). Wir erhalten daher die TE, wenn wir eine die DF berührende Ebene suchen, die durch einen Punkt der G (B) geht, und unter den unzähligen solchen Ebenen, die es giebt, diejenige herauszusuchen, welche zugleich noch einen Punkt der G (B) enthält, oder || G (B) ist. Demnach hätten wir an die DF(A) einen berührenden Kegel (162. Anm. 1.) und durch einen Punkt der G (B) oder || G (B) eine TE an diesen Kegel zu legen. Wir können aber auch an die DF (A) einen berührenden Cylinder legen, der || G (B) ist, und an diesen Cylinder eine TE, die einen Punkt der G (B) enthält.

Wenn nun die gegebene Gerade parallel mit der Achse der DF, also ⊥ $\mathfrak{T}_1$ ist (sie mag G (a_1) heißen), so ist es vortheilhaft, || G (a_1) eine berührende CF an die DF zu legen, denn diese CF steht dann ⊥ $\mathfrak{T}_1$ und hat demnach zum $\mathfrak{R}_1$ den $\mathfrak{R}_1$ des größten oder kleinsten Parallelkreises. Zieht man noch von a_1 eine

Tg an den UR_1 der DF (A), so ist sie der R_1 der TE, und wo sie den UR_1 berührt, ist der R_1 des gesuchten Berührungspunktes.

Wenn ferner die gegebene G (B) die Achse der DF (A) in einem P (a) schneidet, so ist es vortheilhaft, an die DF (A) eine berührende KF zu legen und den P (a) als sein Centrum anzusehen. Denn in diesem Falle ist diese KF zugleich eine DF, daher ihre Berührnngslinie sowohl als ihre S_1 eine Kreislinie. Zieht man nun von der S_1 der G (B) eine Tg an die S_1 der KF, so hat man die S_1 der TE.

Ist endlich die G (B) senkrecht zur Achse der DF (A), so nimmt man am besten eine berührende CF zu Hilfe, die || G (B), also ⊥ Achse ist, und daher nach einem Meridian (C) berührt. Nimmt man dann wieder, wie in der vorigen Nr., ein S (1, 3) zu Hilfe, dessen T_3 mit der Ebene des Meridians (C) zusammenfällt, und so umgeklappt wird, daß der R_3 des neuen und der R_2 des alten Hauptmeridians zusammenfallen, so ist es leicht, den R_3 des gesuchten Berührungspunktes und daraus seinen R_1 und R_2 zu finden.

Wenn aber alle diese besonderen Fälle nicht vorhanden sind, so wird es am zweckmäßigsten sein, (nach 163.) parallel zur G (B) eine gewisse Anzahl TE aufzusuchen (wobei es genügt, ihre S_1 zu zeichnen; ihre Berührungspunkte sind unnöthig), die Umhüllungs-E ihrer S_1 zu zeichnen, wodurch man die S_1 der || G (B) die DF (A) berührenden CF erhält. Legt man an diese S_1 von der S_1 der G (B) aus eine Tg (C), so hat man die S_1 der TE, und mit ihr die gesuchte TE (BC).

Ist aber die DF zweiter Ordnung, so nimmt man ein S (1, 3) zu Hilfe, dessen T_3 || G (B) und ⊥ T_1 ist; dann ist die Berührungslinie der berührenden CF eine ebene E, deren R_3 eine Sehne C_3 des R_3 des neuen Hauptmeridians ist, die seinem zur G (B) parallelen Durchmesser conjugirt ist. Betrachten wir die E (C_3) als T_4 und ziehen von der S_4 der G (B) eine Tg an C_4, so ist ihr Berührungspunkt der R_4 des Berührungspunktes der gesuchten TE.

NB. Da C_4 eine Linie zweiter Ordnung ist, deren Achsen oder Brennpunkte leicht zu bestimmen sind; weil man ferner unter diesen Umständen von einem Punkte in der Ebene der E (C_4) an diese eine Tg führen kann, ohne die C_4 selbst zu zeichnen, so sieht man, daß die vorliegende Aufgabe für Flächen zweiter Ordnung sich lösen läßt, ohne eine Hilfscurve construiren zu müssen.

Fig. 44. 165. Aufg. An eine WF (A, B, a_2) mit geraden Schneidlinien eine TE zu legen, wenn ihr Berührungspunkt c gegeben ist.

Aufl. Da c ein Punkt unserer WF sein muß, so läßt sich durch ihn eine Ez und eine Schneidlinie legen, und weil beide Gerade sind, so gehören sie der gesuchten TE an, und bestimmen also dieselbe. Will man nun die Ez finden, so sucht man zuerst ihren R_2 (C_2), der durch c_2 und a_2 gehen muß. Ihr R_1 (C_1) muß durch c_1 gehen und durch die R_1 der Punkte d, e, in welchen die G (C) die Schneidlinien A und B trifft. (Ist daher c_1 gar nicht gegeben, so kann es gefunden werden; ist es aber vorhanden, so muß es auf der G(d e) liegen). Soll die durch c gehende Schneidlinie gefunden werden, so müssen wir durch c eine Linie legen, die zwei nicht durch c gehende Ez schneidet. Wir müssen demnach zwei Ez zeichnen, und wählen uns daher die bequemsten heraus. Die bequemste Ez ist aber offenbar die, welche auf einer Tafel senkrecht steht, wenn es eine solche giebt. Da es aber (Anh. 12.) auf unserer WF zu jeder Schneidlinie eine parallele Ez giebt, so suchen wir die Ez || G (a_2); diese muß zum R_2 einen P (b_2) haben, der in A_2 und B_2 liegt. Als zweite Ez können wir eine solche nehmen, die || G (A) ist, also die G (D). Legen wir nun durch den P(c) eine Gerade E, welche die G(b_2) und die G(D) schneidet, deren R_2 daher durch b_2 geht, so ist die E(CE) die gesuchte Berührungsebene.

Anm. Wenn A_2 || B_2 ist, so giebt es keine Ez (b_2) || G (a_2), also ist die WF eine mit Leitebene. In der That wären dann die drei Schneidlinien A, B, und a_2 parallel zur E (A_2) oder E (B_2). Das Verfahren aber zur Aufsuchung der TE wäre dasselbe, das wir oben beschrieben haben, wenn wir sagen, A_2 und B_2 schneiden sich in unendlicher Entfernung. Es wird dann die E_2, anstatt daß sie oben durch b_2 ging, || A_2 und || B_2 sein.

Fig. 45. 166. Aufg. Es ist gegeben eine WF (A, B, T_1) mit geraden Schneidlinien und auf ihr ein Punkt b; gesucht die TE der WF für diesen Punkt.

Aufl. Wir suchen wieder die Ez und die Schneidlinie, welche durch den Punkt gelegt werden können, und zusammen die gesuchte Ebene bestimmen. Die Ez hat zum R_2 die G (C_2), welche durch b_2 geht und || K_2 ist. Ihren R_1 finden wir durch die R_1 der Punkte c und d, in denen die G (C) die Geraden A und B schneidet.

Zur Auffindung der durch b möglichen Schneidlinie müssen wir wieder zwei Ez haben, die den P (b) nicht enthalten. Die bequemste Ez ist wieder die auf der T_2 senkrechte, deren R_2 daher ein Punkt ist, welcher in A_2 und B_2 liegt, also die G (a_2). Außer dieser suchen wir noch eine beliebige Ez (D). Dann ist $a_2 b_2$ der R_2 der gesuchten Schneidlinie E, während ihr R_1 gefunden wird durch den P (b) und den P (e), in welchem sie die D schneidet. Die E (CE) ist wieder die gesuchte TE.

Anm. Würden sich A_2 und B_2 in unendlicher Entfernung schneiden, so würde dies auch in Bezug auf E_2 und A_2 der Fall sein müssen, demnach $E_2 \parallel A_2 \parallel B_2$ sein. Alles andere bliebe wie oben.

167. Aufg. Es ist gegeben eine WF (A, B, a_2), deren Schneidlinien A und B krummlinig sind; gesucht eine TE dieser Fläche für einen auf ihr gegebenen Punkt c. Fig. 46.

Aufl. Legt man durch c eine Ez, so gehört sie schon der TE an. Um nun diese vollends zu bestimmen, ziehen wir in den Punkten d, e, nach denen C die A und B schneiden, Tg D und E an dieselben, so erhalten wir eine WF (D, E, a_2) mit geraden Schneidlinien, die die WF (A, B, a_2) nach der Ez (C) berührt (s. 131.). Demnach berührt die verlangte TE auch die WF (D, E, a_2) im P (c), und wir dürfen daher nur noch (nach 165.) die Aufgabe lösen, die TE an der WF (D, E, a_2) für den P (c) zu finden, um die verlangte E (CF) zu erhalten.

168. Aufg. Es ist gegeben eine WF mit krummen Schneidlinien und Leitebene, man sucht eine TE für einen darauf gegebenen P (b). Fig. 47.

Aufl. Legt man wieder durch b eine Ez und in den Punkten, nach denen sie die Schneidlinien schneidet, Tg an diese, so kann man wieder an die Stelle der gegebenen WF eine andere treten lassen, die diese Tg (also gerade Linien) zu Schneidlinien hat. Wir wollen hierüber ein Beispiel machen, das von praktischem Interesse ist. Es sei nemlich die WF (A, a_1, T_1) (wo A eine Schraubenlinie und G (a_1) ihre Achse vorstellt) die gegebene Fläche und P (b) der gegebene Berührungspunkt.

Man zieht also durch c die Ez (B), legt in dem P (c), nach welchem A von B geschnitten wird, eine Tg (C) an A, so ist die

gesuchte TE zugleich die TE der WF (C, a_1, $\mathfrak{T}_1$). Sucht man nun diese (nach 166.), so erhält man die E (BD) als TE.

169. Aufg. Durch einen Punkt a eine TE an eine WF (A, B, b_2) zu legen.

Aufl. Damit eine Ebene die verlangten Bedingungen erfülle, muß sie den P (a) enthalten und TE sein, d. h. eine Ez (C) der WF enthalten (s. 132.). Es giebt demnach so viele TE durch a, als es Ez auf der Fläche giebt, also unzählige; wir suchen deshalb nur ihre Berührungspunkte und verbinden sie durch eine E. Um aber einen solchen Berührungspunkt zu erhalten, verfahren wir nach Nr. 132. oder wenn, wie in unserer Figur, die Schneidlinien gerade sind, nach Nr. 130. Wir nehmen nemlich zwei Ez an (darunter der Bequemlichkeit wegen die G (c_2), außerdem die G (D) || G (A)), suchen ihre Schnitte c, d, mit der E (Ca), so ist der P (e), nach welchem C von der G (cd) geschnitten wird, der Berührungspunkt einer TE (Ca) an der WF (A, B, b_2).

Anm. Ist statt der WF (A, B, b_2) eine WF (A, B, $\mathfrak{T}_1$) gegeben, so ist die Auflösung der vorliegenden Aufgabe die nemliche; nur werden die $\mathfrak{R}_2$ der Ez || $\mathfrak{K}_2$ sein, anstatt daß sie bei der WF (A, B, b_2) durch b_2 gingen.

170. Aufg. Es ist gegeben eine WF und eine Gerade A; man soll eine TE an die WF legen, die || G (A) ist.

Aufl. Nimmt man hier eine Ez (D) und legt dadurch eine Ebene || G (A), so ist sie eine Ebene, welche die verlangten Bedingungen erfüllt. Ihr Berührungspunkt wird gerade so gefunden, wie in der vorigen Nr. angegeben worden.

171. Aufg. Parallel einer gegebenen Ebene (E) eine TE an eine WF zu legen.

Aufl. Man muß hier diejenige Ez suchen, durch welche eine Ebene || E möglich ist, also die Ez die || E ist. Zu dem Ende legt man (196. Anm.) durch einen Punkt der E Parallele zu allen Ez der WF, wodurch man einen Leitkegel oder eine Leitebene erhält, und sucht den Schnitt dieser Leitfläche mit der E; aus so vielen Geraden dieser Schnitt besteht, so viele Ez giebt es, die mit der E parallel sind. Sucht man nun diese Ez auf und legt dadurch eine Ebene || E, so hat man die verlangte TE, deren Berührungspunkt wie in den beiden vorigen Nrn. gefunden wird. Damit man aber die Ez leicht finden kann, die || E sind, ist es

gut, von einem der beiden Risse der Ez einen P zu haben. Ist demnach die gegebene Fläche eine WF (A, B, a_2), so gehen alle R_2 durch a_2. Ist dieselbe aber eine WF (A, B, T_1) mit geraden Schneidlinien, so wird man gut thun, die Schneidlinien als Ez und umgekehrt anzusehen, und deshalb die Schneidlinien zu suchen, die || E sind. Das geht aber leicht, weil der R_2 der Schneidlinien durch den Punkt gehen müssen, nach welchem sich A_2 und B_2 schneiden. (Würden sie sich nicht schneiden, so nähmen wir eine T_3 so an, daß sich A_3 und B_3 schnitten.)

172. Aufg. Durch eine Gerade A eine TE an eine WF zu legen.

Aufl. Die TE muß offenbar durch diejenige Ez (B) der WF gehen, die A schneidet oder damit parallel ist. Hat man B gefunden, so ist die E (AB) die gesuchte TE, deren Berührungspunkt wie in den vorhergehenden Nummern gefunden werden müßte. Will man die Ez finden, welche || A ist, so darf man nur bei einer WF (C, D, a_2) durch a_2 eine Parallele zu A_2 legen, diese als R_2 einer Ez ansehen und ihren R_1 suchen; wird dieser || A_1, so hat man die verlangte Ez, wo nicht, so giebt es keine. Bei einer WF (C, D, T_1) mit geraden Schneidlinien sieht man wieder wie in der vorigen Nummer die Schneidlinie als Ez an, legt daher durch den Punkt a_2, in welchem sich C_2 und D_2 schneiden, eine Parallele zu A_2 und sieht zu, ob sie der R_2 einer Ez ist. Will man aber die Ez B, welche A schneidet, so darf man nur bedenken, daß der Schnittpunkt von A und B sowohl auf A als auf der WF liegt, folglich der Schnitt von A und der WF ist. Sucht man daher diesen Schnittpunkt auf und legt durch ihn die Ez (B), so ist E (AB) die gesuchte TE.

NB. Wie man den Schnitt von A mit der WF findet, kommt später bei den Schnitten von Flächen und Linien vor, wo gezeigt wird, daß man den gesuchten Punkt auf folgende Art erhält: Man legt durch A eine Ebene, z. B. die E (A_2), sucht den Schnitt dieser Ebene mit der WF dadurch auf, daß man die Schnittpunkte der Ez der WF mit E (A_2) durch eine E verbindet, und wo diese von A getroffen wird, ist der verlangte Schnittpunkt.

Anm. Hat man die Aufgaben in dieser oder der vorigen Nr. für den Fall zu lösen, daß weder die R_1 noch die R_2 der Ez durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen, so werden dagegen

die $\Re_2$ der Ez, wenn sie nicht parallel sind, eine Umhüllungs-E bilden. Sucht man diese auf, so muß der $\Re_2$ der Ez diese E berühren, während sie bei einer WF (A, B, a_2) durch a_2 gehen. Wenn also die $\Re_1$ oder $\Re_2$ der Ez nicht durch einen gemeinsamen Punkt gehen, so werden die Aufgaben eben so gelöst, als wenn dies ja der Fall wäre; nur hat man die Mühe, die Umhüllungs-E der $\Re_1$ oder der $\Re_2$ der Ez zu finden.

Fig. 29b. 173. Aufg. An ein einmanteliges Drehungs-Hyperboloid eine TE zu legen, wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

Aufl. Man nehme die T_1 so an, daß die Achse unserer DF die G (a_1) ist; ferner sei a der Mittelpunkt, A der Aequator, B die S_1 der Fläche und der P (d) der Berührungspunkt der TE, so dürfen wir nur die beiden Geraden D und E suchen, welche auf unserer DF durch d gezogen werden können, so ist E (DE) die gesuchte TE. Um aber diese Geraden zu finden, zeichnen wir ihre $\Re_1$ (D_1 und E_1) so, daß sie durch d_1 gehen und A_1 berühren. Weil aber d auf dem + Mantel (140.) liegt, so fallen die S_1 der Geraden D und E nach c und e. Wir haben daher von jeder der beiden Geraden, außer dem P (d), noch zwei Punkte, nemlich ihre S_1, deren $\Re_2$ in $\Re_2$ liegen, und den Punkt in A, dessen $\Re_2$ in A_2 sich befindet. Zeichnen wir die $\Re_2$ dieser Geraden, so muß d_2 in ihrem Schnitte liegen, (d_2 braucht daher nicht gegeben zu sein; wenn man nur d_1 kennt und weiß, auf welchem der beiden Flächenmäntel der P (d) liegt.

Anm. Da die S_1 der TE, hier die G (ce), durch die S_1 der Geraden D und E gehen muß, so sieht man, daß die S_1 der TE in der Regel durch zwei Punkte der S_1 unserer DF geht. Wir sagen in der Regel, denn es kann sich ausnahmsweise treffen, daß die S_1 der beiden Geraden D und E zusammenfallen, also die S_1 der TE mit der S_1 der DF nur einen Punkt gemein hat, d. h. daß sich diese Spuren berühren. Fallen D_1 und E_1 zusammen, so steht die TE $\perp$ T_1 und haben beide Gerade D und E die nemlichen Punkte mit A gemein; also schneiden sich in diesem Falle die beiden Geraden im Aequator. Ist dagegen $E_1 \parallel D_1$ und daher ce gleich dem Durchmesser des Aequators, so schneiden sich die beiden Geraden nicht, und die TE wird zur Asymptotenebene. Daraus gehen, unter der Voraussetzung, daß die Achse des Hyperboloids $\perp$ T_1 ist, folgende Sätze hervor:

1) Die erste Spur eines einmanteligen Drehungs-Hyperboloids wird von der S_1 seiner TE in der Regel in zwei Punkten geschnitten.

2) Ausnahmsweise kann die S_1 der DF von der S_1 der TE in einem Punkte berührt werden, der dann zugleich der Punkt ist, nach welchem die TE unsere DF berührt.

3) Steht die TE ⊥ T_1, so liegt ihr Berührungspunkt im Aequator und umgekehrt.

4) Sind die Punkte (c, e), in welchem die S_1 unserer DF von der S_1 der TE geschnitten wird, um den Durchmesser des Aequators von einander entfernt, so ist die TE eine asymptotische Ebene des Hyperboloids, und demnach auch eine TE des asymptotischen Kegels (s. 138.).

174. Aufg. Durch einen P (b) eine TE an ein einmanteliges Drehungshyperboloid zu legen. Fig. 49.

Aufl. Wir nehmen die T_1 so an, daß sie senkrecht zur Drehungsachse (a_1) ist und durch den P (b) geht. Legen wir nun durch b und eine beliebige Gerade (cd) der WF eine Ebene, so ist sie eine verlangte TE. Ist nun c die S_1 der G (cd), so ist bc die S_1 der TE und ef die zweite Gerade der WF, die in der TE liegt, daher g der Berührungspunkt. Auf dieselbe Art können wir noch so viele Berührungspunkte finden als wir wollen. Was die Grenzpunkte anlangt, so erhalten wir sie dadurch, daß wir von b aus Tg an die S_1 (B) der WF legen, ihre Berührungspunkte mit B sind die Grenzpunkte. Legen wir von b_1 Tg an den R_1 (A_1) der Aequators, so sind ihre Berührungspunkte die R_1 der auf dem Aequator (A) liegenden Berührungspunkte von TE. Legen wir endlich von b_1 aus Tg an die S_1 des asymptotischen Kegels, so erhalten wir die S_1 der durch den P (b) möglichen asymptotischen Ebenen unserer Fläche.

Anstatt auf die eben beschriebene Art so viele Punkte zu suchen, als zur Zeichnung der gesuchten Berührungscurve nothwendig sind, kann man auch von dem Umstande Gebrauch machen, daß die gesuchte Berührungs-C an unserer Fläche in einer Ebene liegt (s. 144. 3)). Sucht man daher nur drei Punkte der C, so ist damit ihre Ebene bekannt, und man hat (nach später entwickelten

Gesetzen) den Durchschnitt dieser Ebene mit dem Hyperboloid zu suchen. Will man diesen Weg einschlagen, so ist es gut, die $\mathfrak{T}_2$ (oder wenn diese gegeben ist, eine $\mathfrak{T}_3$) so zu wählen, daß $a_1b_1 \parallel \mathfrak{K}_1$ (oder beziehungsweise $\parallel \mathfrak{K}'_1$) ist, und die vier besonderen Punkte (zwei im Aequator und zwei in der $\mathfrak{S}_1$) zu suchen, von denen zwei und zwei einen gemeinschaftlichen $\mathfrak{R}_2$ (beziehungsweise $\mathfrak{R}_3$) haben, und daher auf eine $\mathfrak{LE}_2$ (beziehungsweise $\mathfrak{LE}_3$) führen, deren Schnitt mit dem Hyp. die gesuchte Curve giebt. Wir wollen es dem Schüler überlassen, auf die zuletzt angegebene Art die Auflösung unserer Aufgabe durchzuführen.

Fig. 50. 175. Aufg. Parallel einer G (C) an ein einmanteliges Drehungshyperboloid eine TE zu legen.

Aufl. Da es unzählige solche TE giebt, so suchen wir die Berührungscurve, auf die sie führen, und welche mit der eines die Fläche berührenden Cylinders, dessen Ez || C sind, übereinstimmt und daher eine ebene E ist. Nehmen wir nun die $\mathfrak{T}_1$ wie in der vorigen Nummer, die $\mathfrak{T}_2$ aber || G (C) an, so ist die Ebene der gesuchten $E \perp \mathfrak{T}_2$ und sind daher blos zwei Punkte derselben zu ihrer Bestimmung nöthig. Als einen dieser Punkte nehmen wir den in dem Aequator A liegenden Punkt, dessen $\mathfrak{R}_1$ wir erhalten, wenn wir an A_1 eine Tg || C_1 legen und den Berührungspunkt b_1 suchen, und dessen $\mathfrak{R}_2$ daher mit dem $\mathfrak{R}_2$ des Mittelpunktes unserer Fläche zusammenfällt. Nun brauchen wir noch einen zweiten beliebigen Punkt c zu suchen, um den $\mathfrak{R}_2 (b_2c_2)$ der Ebene der gesuchten E zu erhalten. Geben wir daher an, wie || G (C_1) ein Berührungspunkt einer beliebigen TE an unsere Fläche gesucht wird. Da wir wissen, daß eine Ebene TE einer WF ist, sobald sie eine Ez derselben enthält, so legen wir durch eine Ez (D) unserer WF eine E (DF) || G (C), so ist diese eine TE, deren $\mathfrak{S}_1$ (de) ist, und die daher mit der WF noch die G (G) gemein hat. Der Schnittpunkt von D und G ist der verlangte P (c).

Fig. 51. 176. Aufg. Parallel einer E (CD) an ein einmanteliges Drehungshyperboloid eine TE zu legen und ihren Berührungspunkt anzugeben.

Aufl. Die gesuchte TE muß hier diejenige Ez unserer WF enthalten, welche || E (CD) ist. Um nun diese Ez zu finden, müssen wir bekanntlich durch einen beliebigen Punkt Parallele zu den

Ez unserer krummen Fläche und eine Ebene legen, die parallel der gegebenen Ebene ist. Nehmen wir als solchen Punkt den P(a) an, so bilden diese Parallelen den asymptotischen Kegel, der von der E (EF), die durch a geht und || E (CD) ist, nach den Geraden ab und ac geschnitten wird, die ihre S_1 in den den Punkten b und c haben, nach denen die S_1 des asymptotischen Kegels von der S_1 der E (EF) geschnitten wird. Ziehen wir nun die Ez (de) der WF parallel zur G (ca), so muß ihre S_1 in d sein, da de die + Ez (140.) der WF ist. Zieht man daher dg || cb, so erhält man die S_1 (dg) der gesuchten TE und daraus, wie in der vorigen Nummer, ihren Berührungspunkt h.

177. Aufg. Durch eine Gerade A eine TE an ein einmanteliges Drehungshyperboloid zu legen.

Aufl. Diese Aufgabe wird nach den in Nummer 172. gegebenen Regeln gelöst, und bietet der vorliegende Fall nur den Vortheil, daß man bei der Aufsuchung einer Ez der WF, die || G (A) ist, den asymptotischen Kegel benutzen kann.

178. Aufg. Es ist gegeben eine Schraubenfläche (A, a_1, α) und auf ihr ein P(h) als Berührungspunkt einer TE dieser Fläche; man soll diese TE finden. Fig. 52.

Aufl. Zieht man die G (a_1e_1) so, daß sie durch h_1 geht, so hat man den R_1 der durch den P (h) gehenden Ez unserer WF. Sucht man den R_2 des in A liegenden Punktes e, so ist damit auch der P (d) bestimmt, nach welchem unsere Ez die G (a_1) schneidet (s. 146.), denn es muß $\overline{d_2a_2} = \overline{f_2c_2}$ sein. Da nun bekanntlich diese Ez (de) in der gesuchten TE liegt, so brauchen wir nur noch eine Gerade dieser Ebene zu finden, eine Gerade, die in dem P (h) die WF oder eine Linie derselben berühren muß. Denken wir uns daher durch h die auf unserer Fläche mögliche Schraubenlinie B gelegt (s. 146.) und suchen ihre Tg im P (h), so ist diese eine Gerade in unserer TE. Um nun diese Tg zu finden, genügt es, den R_1 der E (B) zu zeichnen, welche eine Kreislinie B_1 ist, die a_1 zum Mittelpunkt hat und durch h_1 geht. Nehmen wir nun die K_2 so an, daß derjenige P (g) der Schraubenlinie B, welcher in der zur T_2 parallelen G (ab) liegt, der T_1 angehört, so ist (nach 72. Satz 2)) die S_1 unserer Tg ein P (k), der so liegt, daß $\overline{h_1k_1} = \widehat{h_1g_1}$ ist. Man kann demnach die Tg (hk)

unserer Schraubenfläche und somit die TE (dhk)*) finden, ohne andere Hilfslinien als Gerade und Kreislinie zeichnen zu müssen.

Fig. 53. 179. Da die OF sehr selten eine praktische Anwendung finden, und wenn eine Aufgabe in Bezug auf Berührung einer solchen Fläche vorkommt, höchstens verlangt wird, eine TE für einen gegebenen Berührungspunkt zu finden, so wollen wir uns begnügen, die Lösung dieser Aufgabe zu geben. Sollten jedoch andere Aufgaben über TE vorkommen, so würde ein geübter Schüler sie nur ähnlich behandeln dürfen, wie die für DF, und die im §. 11. aufgeführten Eigenschaften der OF dabei benutzen.

Ist nun G (a_1) die Achse, A der Hauptmeridian, $\frac{\alpha}{\beta}$ (das sich aus der Parallelellipse B ergiebt), das Achsenverhältniß der Parallelellipsen und b der Berührungspunkt der gesuchten TE, so verfahren wir zur Lösung unserer Aufgabe ganz ähnlich wie bei den DF. Wir legen nemlich an unsere OF eine berührende KF (Ca), dessen Centrum a in der Achse (a_1) liegt und der nach der Parallelellipse (C) berührt, die durch den P (b) geht. Legen wir dann an die KF (Ca) eine TE, die nach der Ez (ab) berührt, so ist dies die gesuchte TE. Um aber dabei die Construction einer neuen Ellipse zu vermeiden, nehmen wir als Schneidlinie der KF (Ca) nicht die E (C) an, sondern eine Parallelellipse (D) der KF (Ca), die mit der schon gezeichneten E (B) kongruent ist und daher ihren R_1 in B, ihren R_2 in D_2 hat. Suchen wir demnach den P (c), in welchem D von ab geschnitten wird, und legen in c eine Tg (E) an D, so ist E (Ea) die verlangte TE.

180. Soll an eine Fläche eine Tg gelegt werden, die durch einen P (a) geht oder parallel ist zu einer Geraden A, und sucht man (nach 114. 2)) eine TE, welche dieselben Bedingungen erfüllt, die die Tg zu erfüllen hat, so wird die Gerade in einer solchen TE, welche durch ihren Berührungspunkt geht, und, je nach der gegebenen Bedingung, entweder a enthält oder || A ist, eine verlangte Tg sein. Da aber durch jeden Berührungspunkt einer solchen TE nur eine einzige von den verlangten Tg (durch a oder || A) möglich ist, so erhält man folgenden Satz:

*) Die R_1 der Punkte c, d und f liegen wieder in a_1.

Die Berührungspunkte von Tg an einer Fläche, welche entweder durch einen Punkt gehen oder zu einer Geraden parallel sein sollen, fallen zusammen mit den Berührungspunkten von TE an dieser Fläche, welche beziehungsweise dieselbe Bedingung erfüllen.

Denkt man sich alle diese Tg gezogen, so bilden sie, wenn sie alle durch einen Punkt gehen, entweder eine oder mehrere TE (wie bei den CF) oder eine die Fläche berührende KF, deren Centrum der gegebene Punkt ist; wenn sie aber parallel zu einer Geraden sind, entweder (wie bei den CF) eine oder mehrere TE, oder eine die Fläche berührende CF, deren Richtung die gegebene Gerade angiebt.

Soll die Tg einer Fläche in einer gegebenen Ebene liegen, so muß (114. 2)) diese Ebene eine TE der Fläche sein, und dann ist jede Gerade der Ebene, die durch den Berührungspunkt dieser TE geht, eine gesuchte Tg.

Soll endlich die Tg einer Fläche parallel einer Ebene sein, so muß sie parallel einer Geraden der Ebene sein; man erhält daher so viele berührende CF, als man in der Ebene Richtungen annehmen kann.

181. Will man an zwei Flächen eine gemeinschaftliche TE legen, so hat man zu unterscheiden, ob dieselben CF sind oder nicht. Sind beide Flächen CF, so ist die Aufgabe in der Regel unmöglich, was auf folgende Art leicht einzusehen ist. Giebt es eine solche TE, so muß eine Ebene, welche die beiden CF (nach den Curven A und B) schneidet, die TE nach einer G (C) schneiden, die sowohl A als B (beziehungsweise in den Punkten a und c) berührt. Zieht man nun in a und c die Cz der CF, so müssen auch diese in der TE liegen, also parallel sein oder sich schneiden. Ist dies der Fall, so hat man eine TE gefunden, wo nicht, was in der Regel vorkommen wird, so ist die Aufgabe unmöglich.

182. Aus dem eben Gesagten geht aber unmittelbar hervor, daß, wenn alle Cz der einen CF mit allen Cz der andern parallel laufen, oder sie schneiden, eine gemeinschaftliche TE nothwendig möglich ist, und zwar giebt es offenbar so viele TE, als in einer die beiden Flächen schneidenden Ebene gemeinschaftliche Tg an sie gelegt werden können; wir haben demnach den Satz:

Wenn zwei CF parallel sind oder zwei KF ein gemeinschaftliches Centrum haben, so lassen sie so viele gemeinschaftliche TE zu, als man in einer die beiden Flächen nach E schneidenden Ebene gemeinschaftliche Tg an sie legen kann.

183. Haben zwei konische DF parallele Achsen und bilden ihre Halbmeridiane mit ihren resp. Achsen gleiche Winkel, und legen wir an ihre S_1 (die T_1 senkrecht zu den Achsen der beiden DF vorausgesetzt) eine gemeinschaftliche Tg, die wir als S_1 einer gemeinschaftlichen TE betrachten, so werden die beiden Berührungs-Ez parallel sein, sobald entweder die A_1 der Centren gleiche Vorzeichen haben und die Tg eine äußere, oder ungleiche und die Tg eine innere ist.

184. Hat man an eine CF und eine nicht entwickelbare Fläche (Fl) eine gemeinschaftliche TE zu legen, so legen wir an die Fl eine berührende CF, die parallel zur gegebenen CF ist, und es ist die den beiden CF gemeinsame TE die verlangte Ebene, und der Punkt, in welchem die Berührungs-Ez der berührenden CF die E schneidet, nach welcher diese CF die Fl berührt, ist der Berührungspunkt der TE auf der Fl.

Ist statt der CF eine KF gegeben, so verfährt man ähnlich so, nur nimmt man eine KF zu Hilfe, die die Fl berührt und ihr Centrum in dem der gegebenen KF hat. Ist aber die KF zugleich eine DF und die Fl eine DF, deren Achse mit der der KF parallel ist, so ist es zweckmäßiger, eine die DF berührende KF zu Hilfe zu nehmen, die die Fl nach einem Parallelkreis berührt, und deren Ez mit ihrer Achse dieselben Winkel bilden, den die Ez der KF mit ihrer Achse bilden.

185. Hat man an zwei unentwickelbare Flächen eine gemeinschaftliche TE zu legen, so kann man an beide Flächen zwei berührende KF legen, die ein gemeinschaftliches Centrum oder zwei CF, die parallele Richtungen haben, oder, wenn die beiden Flächen DF mit parallelen Achsen, zwei Drehungskegel deren Ez beziehungsweise parallel sind (183.) und die diesen beiden Hilfsflächen gemeinschaftliche TE ist zugleich TE an beiden gegebenen Fl; die Punkte, in denen die beiden Berührungs-Ez der TE die beiden Berührungs-E der CF oder KF schneiden, sind die Berührungspunkte der TE.

Anm. Da man unzählige solche TE finden kann, indem das Centrum der KF oder die Richtung der CF beliebig gewählt werden kann, so giebt es unzählige TE, die eine Umhüllungsfläche bilden, welche eine CF ist; jede Gerade, welche durch die beiden Punkte geht, nach welcher eine TE die beiden Flächen berührt, ist eine Cz der Umhüllungsfläche.

186. Nachdem man gesehen hat, daß zwei unentwickelbare Flächen eine gemeinschaftliche TE nicht bestimmen, so wird man daraus schließen, daß drei solche Flächen es thun werden. In der That suchen wir (nach der vorigen Nummer) die CF, welche die erste und zweite der gegebenen Flächen, sodann die CF, welche die erste und dritte (jede nach einer C) berührt, so sind die Punkte, nach denen sich die auf der ersten Fläche liegenden zwei Berührungs-C schneiden, Berührungspunkte der den drei Flächen gemeinschaftlichen TE. Man darf also nur in einem solchen Punkte eine TE an die erste Fläche legen und man hat die gesuchte TE.

Obwohl wir eine Auflösung der beiden letzten Aufgaben gegeben haben, so werden wir doch in den meisten Fällen keinen Gebrauch davon machen können, indem die Ausführung der Auflösung zu so complicirten Operationen Veranlassung giebt, daß wir uns auf die Genauigkeit des Resultates nicht verlassen könnten. Nur in besonderen Fällen vereinfacht sich die Sache so sehr, daß wir mit wenig Mühe zum Ziele gelangen. Ein Beispiel darüber in der folgenden Nummer.

187. Aufg. An drei Kugeln eine gemeinschaftliche TE zu legen. Fig. 54.

Aufl. Wir nehmen die T_2 so an, daß sie die Mittelpunkte (a, b, c) der Kugeln und daher auch ihre Hauptmeridiane (A, B, C) enthält, die T_1 so, daß sie auf der G (ab) senkrecht steht. Die die Kugeln A und B berührende CF ist hier in der Regel, wie in unserer Figur, eine konische DF (D), deren Achse in ab fällt, deren Centrum (d) in der G (ab) liegt, und die die Kugel A nach einer Kreislinie F berührt. Eben so erhalten wir, in Bezug auf die Kugeln A und C, eine konische DF (E), die in e ihr Centrum, in G (ac) ihre Achse hat, und die Kugel A nach einer Kreislinie G (von der blos der R_2 (G_2) angegeben ist) berührt. Die gesuchte TE nun muß durch d und e gehen, und ihren Berührungspunkt für die Kugel A in dem P (f) oder im P (g) ha-

ben, nach welchem sich die beiden Kreislinien F und G schneiden. Es ist also sowohl E(def) oder E(deg) eine gemeinschaftliche TE.

Anm. 1. Da jedes unserer beiden Kugelpaare A und B, A und C, zwei berührende KF zuläßt, eine, deren Centrum zwischen a und b, oder a und c, und eine für welche es außerhalb dieses Zwischenraumes liegt, so bekommen wir im Ganzen 8 TE. Die Kugeln können aber auch so liegen, daß weniger, ja sogar so, daß gar keine TE für sie möglich ist.

Anm. 2. Da die TE(def) die drei Kugeln berührt, so muß sie auch die KF berühren, die die Kugeln B und C gemeinschaftlich berührt, und deren Centrum in h liegt. Es muß also dieser Punkt, da er auch in der T_2 liegt, der S_2 der E(def), also der G(de) angehören. Man hat daher den Satz:

Wenn man an je zwei von drei in einer Ebene liegenden Kreisen eine gemeinschaftliche Tg legt, so liegen die drei Punkte, nach denen diese Tg die drei entsprechenden Centrallinien je zweier Kreise schneiden, in einer Geraden.

§. 13.

Durchschnitte von Flächen mit Linien und Flächen.

187. Wenn zwei Flächen sich schneiden, so haben wir die Aufgabe, ihre Schnittlinie durch ihre Risse zu bestimmen. Um nun diese Aufgabe zu lösen, verfahren wir in der Regel auf folgende Art:

Man suche die Punkte, in denen die Ez der einen Fläche die andere schneiden, verbinde die so erhaltenen Punkte durch eine E, so ist diese die gesuchte Schnittlinie.

Anm. Es muß hier ein für allemal bemerkt werden, daß wir in diesem §. alle Flächen und Linien, deren Schnitte wir suchen, als unbegrenzt voraussetzen. Ist man im Stande, Durchschnitte von unbegrenzten Flächen und Linien zu finden, so hat man in dem Falle, wo Grenzen gegeben sind, nur noch zu beachten, daß alle Schnittpunkte, welche über die gegebenen Grenzen hinausfallen, ungiltig sind.

189. Die in der vorigen Nummer angegebene Regel zur Aufsuchung des Schnittes zweier Flächen ist mitunter nicht anwend-

bar, jedenfalls aber unbequem, wenn der gesuchte Schnitt zweier Flächen eine Ez der einen Fläche ist. In diesem Falle genügt schon ein Punkt der Schnittlinie zu ihrer Bestimmung; wählen wir als solchen Punkt den, welchen die Ez der einen Fläche mit der SchL dieser Fläche gemein hat, so wird man, in Erwägung daß dieser Punkt auch der andern Fläche angehört, einsehen, daß er gefunden wird, indem man den Punkt sucht, in welchem die SchL der einen Fläche die andere schneidet. Hat man aber einen solchen Punkt gefunden, so ist er nur dann brauchbar, wenn die durch ihn gelegte Ez der einen Fläche auch der anderen angehört. Hieraus geht hervor:

Wenn der gesuchte Schnitt zweier Flächen eine Ez der einen Fläche ist, so sucht man die Punkte, in denen die SchL dieser Fläche die andere schneidet, und nur die durch einen solchen Schnittpunkt gelegte Ez der einen Fläche, die zugleich der andern Fläche angehört, ist eine gesuchte Schnittlinie.

190. In den beiden eben angegebenen Verfahrungsarten zur Aufsuchung des Schnittes zweier Flächen stoßen wir auf die Aufgabe: den Durchschnittspunkt einer Linie der einen Fläche mit der anderen zu finden. Wir müssen daher vor Allem wissen, wie wir die Aufgabe lösen: den Durchschnitt a einer Linie A mit einer Fläche zu finden.

Da der R_1 (a_1) des gesuchten Schnittpunktes in dem R_1 (A_1) der Linie A und in dem R_1 der Fläche liegen muß, so stellt sich dieser R_1 des Schnittpunktes gleich heraus, wenn der R_1 der Fläche eine Linie, d. h. wenn die Fläche eine EF(B_1) ist (79. u. 101.); in diesem Falle muß der R_1 in dem Punkte a_1 liegen, den A_1 und B_1 gemein haben. Haben diese daher keinen Punkt gemein, so findet die Aufgabe keine Lösung. Haben sie aber einen Punkt a_1 gemein, so giebt es einen Punkt a auf der gegebenen Linie (der a_1 zum R_1 hat), welcher, da er in der Ez (a_1) der EF liegt, der gesuchte Punkt ist. Es folgt daher der Satz:

1) Damit eine Linie A und eine EF(B_1) einen Punkt gemein haben, ist es nothwendig aber auch genügend, daß ihre R_1 einen Punkt gemein haben; jeder gemeinschaftliche Punkt ihrer R_1 ist der R_1 eines ihnen selbst gemeinsamen Punktes.

Anm. Haben die Linie A und die CF (B_1) zwei unendlich nahe Punkte a, b gemein, so haben die Risse A_1 und B_1 entweder ebenfalls zwei solche Punkte a_1, b_1 gemein, in welchem Falle sich A_1 und B_1 berühren, oder es kann auch ausnahmsweise die G (ab) $\perp$ T_1 sein, in welchem Falle der R_1 dieser Geraden ein P (a_1) ist, der zugleich den R_1 einer Ez der CF (B_1) vorstellt. Da sich in beiden Fällen auch das Umgekehrte nachweisen läßt, so haben wir den Satz:

2) Wenn eine Linie A und eine CF (B_1) sich in einem P (a) berühren, so berühren sich in der Regel A_1 und B_1 in a_1, oder ist ausnahmsweise die G (a_1) eine Tg der Linie A im P (a), und umgekehrt.

191. Wenn der R′ (der Central- oder Parallelriß) einer Fläche eine Linie A′ ist, d. h. wenn die Fläche eine KF (A′) oder eine CF (A′) (s. 102.) ist, deren Ez St′ sind, und es ist außer ihr noch von einer Linie B ihr R′ (B′) gegeben, so lassen sich auf dieselbe Art, wie in der vorhergehenden Nummer, folgende Sätze nachweisen:

1) Damit eine CF (A′) oder eine KF (A′) und eine Linie B einen P (a) gemein haben, ist es nothwendig aber auch hinreichend, daß ihre R′ einen P (a′) gemeinschaftlich enthalten; jeder gemeinschaftliche Punkt ihrer R′ ist der R′ eines ihnen selbst gemeinsamen Punktes.

2) Wenn eine CF (A′) oder eine KF (A′) und eine Linie B sich in einem P (a) berühren, so berühren sich in der Regel A′ und B′ in a′, oder es ist ausnahmsweise die G (a′) eine Tg der Linie A im P (a).

192. Ist der Riß einer gegebenen Fläche (F) keine Linie, und wird ihr Schnitt mit einer Linie A gesucht, so verfahren wir zur Aufsuchung desselben folgendermaßen:

Wir legen durch A eine Hilfsfläche (Hfl), suchen den Schnitt B dieser Hfl mit der F und der P (a), den A und B gemein haben, ist der gesuchte Schnittpunkt. Haben A und B keine Punkte gemein, so können auch A und F keine gemein haben. Denn sonst müßten diese Punkte in der durch A gelegten Hfl und in der F, also auch in dem Schnitt B der Hfl und F liegen, es müßten dieselben daher in B und A sich

befinden. Haben B und A zwei unendlich nahe Punkte gemein, so findet dies auch in Bezug auf A und F statt, d. h. wenn A und B sich berühren, so wird auch die F von A berührt.

Anm. 1. Wenn wir von zwei Linien oder von einer Fläche und einer Linie sagen, sie schneiden oder berühren sich, so kann dies in endlicher oder unendlicher Entfernung geschehen; haben sie aber weder in endlicher noch unendlicher Entfernung einen Punkt gemein, so sagen wir sie kreuzen sich.

Anm. 2. Es ist noch nothwendig, über jeden auf die angegebene Art aufgesuchten Schnittpunkt zu entscheiden, ob er für T_1 oder T_2 sichtbar oder unsichtbar ist. Er ist nur dann sichtbar für die T_1, wenn er sowohl auf A als auch auf B sichtbar ist, und daher unsichtbar, wenn er nur auf einer dieser Linien unsichtbar ist. Ob aber das eine oder andere der Fall ist, stellt sich in jedem Beispiele heraus. Außer diesem haben wir noch zu unserer vorliegenden Aufgabe ein für allemal folgende Bemerkung zu machen: Von dem Theil der Linie A_1, der zwischen dem UR_1 der F liegt, wird nur der Theil zusammenhängend gezogen, der zwischen dem R_1 eines für die T_1 sichtbaren Punktes und dem UR_1 liegt.

193. Wenn wir das, was bis jetzt über die Aufsuchung von Durchschnitten zweier Flächen gesagt worden ist, übersehen, so hat es den Anschein, als ob diese Aufgaben gar nicht gelöst werden könnten, indem man zur Aufsuchung des Schnittes zweier Flächen den Durchschnitt einer Linie mit einer Fläche finden muß, und wieder, um diesen zu finden, der Durchschnitt der F mit der Hfl, also der Schnitt zweier Flächen verlangt wird. Allein man darf nicht vergessen, daß durch die Linie, deren Schnitt mit einer Fläche gesucht wird, unzählige Hfl möglich sind, und daher, wie wir sehen werden, diese Hfl jedesmal so gewählt werden kann, daß die Aufsuchung ihres Schnittes mit der gegebenen F eine schon bekannte Aufgabe ist. Namentlich in dem Falle, wo bei der Aufsuchung des Schnittes zweier Flächen die Punkte gesucht werden, in denen die eine Fläche von den Ez der anderen getroffen werden, hat man es mit ebenen Linien zu thun*), und unsere Hfl

*) Man wird sich erinnern, daß die Ez der Flächen, die wir im §. 8. aufgeführt haben, gerade Linien oder ebene Curven sind.

kann daher eine Ebene sein. In einem solchen Falle darf man daher nur im Stande sein, den Durchschnitt einer Ebene mit einer Fläche zu finden. Deshalb wollen wir auch zuerst die Aufgaben durchgehen, in denen die eine der beiden Flächen eine Ebene ist. Zuvor jedoch müssen wir noch einige allgemeine Betrachtungen über die Aufsuchung des Schnittes zweier Flächen machen, die auch in den Fällen, wo die eine Fläche eben ist, ihre Anwendung finden werden.

194. Wir haben oben gesagt, daß wir in der Regel bei der Aufsuchung des Durchschnittes zweier Flächen zu suchen haben, die Durchschnitte der Ez der einen Fläche mit der anderen; weiter haben wir erfahren, daß bei der Aufsuchung des Durchschnitts einer Linie mit einer Fläche drei Fälle vorkommen können, nemlich es können sich die Linie und die Fläche schneiden, berühren und kreuzen. Nehmen wir nun auf der einen Fläche eine Ez (A) an und suchen ihren Schnittpunkt mit der andern Fläche (F) auf, so kann es sein, daß wir umsonst suchen, wenn nemlich A und F keinen Punkt gemein haben. Eben so kann dies uns begegnen mit einer zweiten, dritten Ez, ja vielleicht mit allen, da wir meistens der Zeichnung nicht ansehen können, ob die beiden Flächen überhaupt einen Schnitt geben. Darum wollen wir, wo möglich immer, wenn der Schnitt zweier Flächen gesucht ist, vor allem untersuchen, welche Ez der einen Fläche die andere sicher schneiden. Diejenige Ez, welche an der Grenze liegt zwischen denjenigen, welche die andere Fläche schneiden und denen, welche sie kreuzen, nennen wir Grenzerzeugende und die in ihr liegenden Punkte der gesuchten Schnittlinie die Grenzpunkte dieser Schnittlinie. Wie wir diese Grenzpunkte finden, wollen wir in den einzelnen Aufgaben angeben.

195. Außer den Grenzpunkten der Schnittlinie sind auch besonders zu suchen diejenigen Punkte derselben, welche in den ersten und zweiten Profilen der beiden Flächen sich befinden; denn der Punkt der Schnittlinie, welcher auf dem ersten Profil einer der Flächen liegt, hat seinen R_1 in dem ersten Profilriß dieser Fläche und dieser R_1 ist die Grenze zwischen dem Theil des R_1 der Schnittlinie, der zusammenhängend und dem, der gestrichelt gezogen wird (85.). Wir wollen daher hier allgemein die Mittel angeben, wie diese Profilpunkte gefunden werden.

Will man den ersten Profilpunkt auf der ersten der beiden sich schneidenden Flächen, so darf man nur bedenken, daß dieser liegt auf dem ersten Profil der ersten Fläche und auf der zweiten Fläche, und man wird sich überzeugen,

daß, wenn zwei Flächen sich schneiden, und es ist der Punkt der Schnittlinie gesucht, der auf dem ersten Profil der ersten Fläche liegt, dieser Punkt gefunden wird, indem man sucht, wo das erste Profil der ersten Fläche die zweite Fläche schneidet.

In den Fällen, wo die Anwendung dieses Verfahrens eine nur etwas mühsame Construction verursacht, kann man auf folgendem Wege zum Ziele gelangen:

Wenn die gesuchte Schnittcurve (B) mit dem $\mathfrak{Pr}_1$(A) der einen Fläche ($\mathfrak{F}$) einen $\mathfrak{P}$(a) gemein hat, so werden sich in der Regel die $\mathfrak{R}_2$ (A_2, B_2) dieser Linien schneiden in dem $\mathfrak{R}_2(a_2)$ des $\mathfrak{P}$(a). Sucht man nun die $\mathfrak{R}_2$ von solchen Punkten der $\mathfrak{C}$(B), die zu beiden Seiten von A_2 nahe an dieser Linie liegen, so erhält man durch Verbindung dieser $\mathfrak{R}_2$ den Punkt a_2 und daraus mittelst des $\mathfrak{KL}_1$ des $\mathfrak{P}$(a) seinen $\mathfrak{R}_1(a_1)$.

196. Wir sind nun so weit vorbereitet, um zu den speciellen Aufgaben über Durchschnitte überzugehen, und machen, wie wir schon oben gesagt, den Anfang mit den Durchschnitt von Ebenen und krummen Flächen. Wir haben dabei nur die allgemeine Bemerkung zu machen, daß wir in der Ebene jede in ihr liegende Gerade als eine ihrer $\mathfrak{Ez}$ ansehen.

Aufg. Den Durchschnitt einer Ebene mit einer Regelfläche (hier der der $\mathfrak{KF}$ (Bb)) zu finden. Fig. 55.

Aufl. Wir wählen unser Tafelsystem am besten so, daß eine der Tafeln, z. B. die $\mathfrak{T}_2$, senkrecht steht zu unserer $\mathfrak{E}$ (A_2), und suchen dann, wo eine $\mathfrak{Ez}$ (C) der Regelfläche die $\mathfrak{E}$ (A_2) schneidet. Demnach haben wir wiederholt die schon längst bekannte Aufgabe zu lösen: den Durchschnitt a einer Geraden C mit einer $\mathfrak{E}$ (A_2) zu finden. Bezeichnen wir den $\mathfrak{R}_2$ dieser $\mathfrak{LE}_2$ mit A_2, so liegt der $\mathfrak{R}_2$ unserer gesuchten Schnittlinie A in A_2 und wird begrenzt durch den $\mathfrak{UR}_2$ der gegebenen Regelfläche. Wollen wir nun untersuchen, welche $\mathfrak{Ez}$ unserer Regelfläche die $\mathfrak{E}$(A_2) nicht schneiden, so sieht man leicht ein, daß jede solche $\mathfrak{Ez}$, da sie Gerade ist, mit $\mathfrak{E}$(A_2) parallel sein muß.

Ist nun unsere Regelfläche eine $\mathfrak{EF}$, so ist klar, daß entweder alle oder keine $\mathfrak{Ez}$ der $\mathfrak{EF}$ mit der $\mathfrak{E}$(A_2) parallel sind.

Ist aber, wie in dem vorliegenden Beispiele, die Regelfläche eine KF (Bb), so kann nur diejenige Ez || E(A_2), deren R_2 || A_2 ist, also die Ez D und E.

Wäre die gegebene Fläche eine CF(B), so könnte nur die Ez || E (A_2), deren R_2 || A_2 ist und, wie alle R_2 der Ez, B_2 berührt.

Wäre die gegebene Fläche eine WF mit Leitebene, so nähmen wir die T_1 parallel zur Leitebene, die T_2 wieder senkrecht zur gegebenen Ebene an, und dann könnte (wenn diese nicht || T_1 ist, in welchem Falle sie zu allen Ez der WF parallel wäre) nur diejenige Ez || E (A_2) sein, welche ⊥ T_2 ist.

Um aber ganz allgemein finden zu können, welche Ez der Regelfläche mit einer gegebenen Ebene, auch wenn diese keine Lothebene ist, parallel sind, benütze man die Anmerkung zu der vorliegenden Nummer.

Was noch die Profilpunkte unserer gesuchten Schnittcurve in dem vorliegendem Beispiele betrifft, so besteht sowohl das erste als das zweite Profil einer KF aus Ez; man darf daher nur zur Aufsuchung der ersten Profilpunkte z. B. diejenigen Ez auswählen, die das erste Profil, d. h. deren R_1 den UR_1 der KF (Bc) bilden, also die Ez F und G. Dasselbe gilt, wenn die gegebene Regelfläche eine CF ist.

Anm. 1. Sind gegeben zwei Regelflächen, und soll untersucht werden, welche Ez der einen Fläche mit Ez der anderen parallel laufen, so nimmt man einen beliebigen Punkt a an, und legt dadurch Parallele zu allen Ez der ersten Regelfläche, so erhält man, wenn diese eine CF ist, eine Gerade; wenn eine Ebene oder eine WF mit Leitebene, eine Ebene; wenn eine andere Regelfläche, eine KF. Legt man nun durch a auch Parallele zu allen Ez der zweiten Regelfläche, so müssen diejenigen Ez der beiden Flächen, welche ursprünglich parallel waren, nun, wo sie durch einen gemeinschaftlichen Punkt a gehen, zusammenfallen. Erhält man also durch die parallele Verschiebung zwei Gerade, die zusammenfallen, so sind die gegebenen CF parallel; eine Gerade und eine Ebene oder KF, in der diese Gerade liegt, so ist die CF zu gewissen Ez der anderen Regelfläche parallel; erhält man zwei Flächen, die sich (nach Geraden) schneiden, so kommen auf der einen Regelfläche Ez vor, die zu Ez der anderen parallel sind. Was die Wahl des P (a) betrifft, so ist nur zu bemerken, daß es vortheilhaft ist, ihn in einer der beiden gegebenen Flächen, jeden-

falls aber ihn, wenn eine der beiden Flächen eine KF ist, im Centrum derselben anzunehmen.

Anm. 2. Ist die KF, welche von einer Ebene geschnitten wird, zugleich eine Drehungsfläche (s. 105.), so wird die Schnittlinie eine Linie zweiter Ordnung (s. Anh. 6.). Darum nennt man die Linien zweiter Ordnung auch Kegelschnittlinien.

197. Ist der Durchschnitt einer Regelfläche mit einer Ebene gesucht, ohne daß man die Tafeln frei wählen kann, so nimmt man am besten eine T_3 zu Hilfe, die auf der gegebenen Ebene senkrecht steht, und sucht mittelst des S (1, 3) oder S (2, 3) die Risse der Schnittcurve, und daraus die Risse für das gegebene Tafelsystem. Wir wollen darüber ein Beispiel machen. Fig. 56.

Aufg. Es ist gegeben eine KF (Aa) und eine E (bcd); gesucht ihr Durchschnitt.

Aufl. Man nehme eine T_3 an, die ⊥ E (bcd) und ⊥ T_1 ist, so ist K'_1 ⊥ S_1 (be) der E (bcd). Klappen wir nun die T_3 so um, daß sie mit T_1 die K′ gemeinschaftlich behält, so ist b_3c_3 der R_3 der Ebene. Nimmt man nun auf der KF (Aa) die Ez (fa) an und sucht ihren R_3 (f_3a_3), so ist der P (g_3), in welchem f_3a_3 und b_3c_3 sich schneiden, der R_3 des P (g), in welchem die E (bcd) von der Ez (fa) geschnitten wird. Mittelst g_3 findet man leicht g_1 und g_2. Eben so erhält man andere Schnittpunkte mittelst anderer Ez der KF (Aa).

Anm. Man könnte diese Aufgabe auch so lösen, daß man, ohne eine T_3 zu Hilfe zu nehmen, sucht, wo die Ez der KF (Aa) die E (bcd) schneiden. Da aber die E (bcd) keine Lothebene ist, so wäre dieser Weg wenigstens eben so umständlich, wie der in der vorliegenden Figur eingeschlagene. Dieser letztere Weg ist aber jedenfalls vorzuziehen, wenn, wie es in der Anwendung immer der Fall ist, die KF begrenzt ist. In diesem Falle schneiden nur diejenigen Ez der KF die Ebene, deren Schnittpunkte innerhalb ihrer gegebenen Grenzen liegen. Für welche Ez aber dies der Fall ist, sieht man in der T_3 unmittelbar. So z. B. sieht man in der T_3 gleich, daß die Ez (fa) die E (bcd) nicht schneidet.

198. Aufg. Den Durchschnitt einer KF (Aa) und einer E (Ba) zu finden. Fig. 57.

Aufl. Da die E (Ba) das Centrum a der KF (Aa) enthält, so kann sie mit der KF nur Ez gemein haben. Wir suchen da-

her (nach 189.), wo die E(Ba) von der Schneidlinie A der KF getroffen wird. Demnach legen wir (nach 192.) durch A eine Hfl, hier die E(A_2), suchen den Schnitt C der E(A_2) und der E(Ba), so sind die Punkte b, c, in welchen sich C und A schneiden, die Punkte, in denen die Schneidlinie der KF die E(Ba) treffen. Ziehen wir nun die Ez ba und ca der KF, so sind dies die gesuchten Schnittlinien, da sowohl ba als ca in der E(Ba) liegen.

Anm. Eben so verfahren wir, wenn von einer andern Regelfläche, die von einer Ebene nach Ez geschnitten wird, eine ebene Schneidlinie gegeben ist. Wir suchen nemlich mit Hilfe der Ebene der Schneidlinie die Punkte, in denen diese die gegebene Ebene schneiden, legen dadurch Ez und betrachten die als die gesuchten, welche in der gegebenen Ebene liegen. Ist aber die gegebene Schneidlinie keine ebene E, so suchen wir uns eine ebene Schneidlinie, indem wir die gegebene Regelfläche mittelst einer Loth-Ebene schneiden, die alle Ez (in endlicher oder unendlicher Entfernung) schneidet, den Schnitt (nach 196.) aufsuchen, und dann wie oben verfahren.

Fig. 58. 199. Aufg. Den Durchschnitt einer Ebene mit einer DF zu finden.

Aufl. Wir wählen unser Tafelsystem so, daß die T_1 senkrecht zur Achse der DF steht und die T_2 senkrecht zur Ebene. Es sei nun DF(A) die gegebene DF und E(B_2) die gegebene Ebene. Dann ist das vom UR_2 der DF eingeschlossene Stück von B_2 der R_2 der gesuchten Schnittlinie. Um nun einzelne Punkte des Schnittes zu finden, suchen wir, nach der allgemeinen Regel, wo die Ez der DF, d. h. die Parallelkreise, die E(B_2) schneiden. Da bei unserer Stellung der Tafeln der R_2 eines jeden Parallelkreises eine zur K_2 parallele Gerade ist, die von dem R_2 des Hauptmeridians A begrenzt wird, so sieht man in der Zeichnung unmittelbar, daß a und b die Grenzpunkte (s. 194.) der Schnittlinie sind. Diese Punkte a und b sind, da sie auf dem Hauptmeridian liegen, auch Punkte des Pr_2 (s. 81.) unser DF. Da aber diese in vorliegender Figur auch Polarkreise hat, so giebt es auf dem Pr_2 unserer DF noch zwei Punkte c, d, welche auf dem Polarkreise C liegen. Wollen wir die ersten Profilpunkte e, f, so suchen wir, wo wir die E(B_2) von dem das erste Profil

bildenden Aequator D treffen werden. Die $\mathfrak{R}_2$ dieser Punkte liegen im B_2 und im $\mathfrak{R}_2$ des entsprechenden Parallelkreises, die $\mathfrak{R}_1$ in dem $\mathfrak{R}_1$ des Parallelkreises und in den entsprechenden $\mathfrak{KL}_1$. In ganz ähnlicher Weise, wie diese Punkte, finden wir auch die Schnittpunkte g, h von irgend einem anderen Parallelkreise E mit der $\mathfrak{E}(B_2)$.

Anm. Sind die Tafeln gegeben, und haben sie nicht die in der vorliegenden Figur vorausgesetzte Lage, so wählen wir ein neues System, das gegen die gegebenen Dinge eine solche Lage hat. So z. B. kann es sein, daß zwar die Achse der $\mathfrak{DF} \perp \mathfrak{T}_1$, aber die gegebene Ebene eine schiefe ist. In diesem Falle wählen wir eine $\mathfrak{T}_3$, die zur Ebene und zur $\mathfrak{T}_1$ senkrecht steht. Da es aber bei dieser Aufgabe in Bezug auf die Ausführung der Zeichnung nicht gleichgültig ist, wie wir die $\mathfrak{T}_3$ umklappen, so wollen wir die Lösung dieser Aufgabe in der folgenden Nummer durchführen.

200. Aufg. Es ist gegeben eine $\mathfrak{DF}(A)$ und eine $\mathfrak{E}(abc)$; gesucht der Schnitt dieser Flächen. Fig. 59.

Aufl. Wir nehmen eine $\mathfrak{T}_3$ an, die auf der $\mathfrak{S}_1$ (ad) der $\mathfrak{E}$ (abc) senkrecht steht. Damit wir nun den $\mathfrak{R}_3$ des Hauptmeridians für das $\mathfrak{S}$ (1, 3) nicht noch einmal zeichnen brauchen, klappen wir die $\mathfrak{T}_3$ so um, daß $\mathfrak{K}'_3$ auf $\mathfrak{K}_2$, $+\mathfrak{T}'_3$ auf $+\mathfrak{T}_2$ und der $\mathfrak{R}_3$ der Achse auf ihren $\mathfrak{R}_2$ fällt; dann kommt auch der $\mathfrak{R}_3$ irgend eines Parallelkreises auf seinen $\mathfrak{R}_2$ und der $\mathfrak{R}_3$ des neuen Hauptmeridians B auf den $\mathfrak{R}_2$ des alten Hauptmeridians A zu liegen. Suchen wir nun noch den $\mathfrak{R}_3\,(a_3b_3)$ der $\mathfrak{E}$(abc), so finden wir in ähnlicher Weise, wie in der vorhergehenden Nummer, den $\mathfrak{R}_3$ eines Schnittpunktes, z. B. des $\mathfrak{P}$ (e) im Parallelkreise C, und mittelst des $\mathfrak{KL}'_3$, $\mathfrak{KL}'_1$ und den Parallelkreis C des $\mathfrak{P}$ (e) den $\mathfrak{R}_1(e_1)$. Wie man e_2 aus e_1 findet, ist bekannt. Was die Grenzpunkte f, g und die ersten Profilpunkte h, i unserer Schnittlinie betrifft, so werden sie hier in dem $\mathfrak{S}$ (1, 3) eben so gefunden, wie in der vorigen Nummer im $\mathfrak{S}$(1, 2). Was aber die zweiten Profilpunkte betrifft, so fallen sie hier nicht mit den Grenzpunkten zusammen und müssen daher besonders gesucht werden. Es geschieht dies nach der oben (195.) angegebenen Regel. Wir legen nemlich durch das zweite Profil, d. i. durch den Hauptmeridian A, eine Fläche, hier am besten die $\mathfrak{E}(A_1)$, suchen ihren

Schnitt D mit der E(abc), und die Punkte k, l, in denen D und A sich schneiden, sind die gesuchten Profilpunkte.

201. Aufg. Den Durchschnitt einer E(abc) mit einer OF $\left(A, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ zu finden.

Aufl. Man sucht hier wieder, wo die Ez der OF, d. h. die Parallelellipsen, die E(abc) schneiden. Da aber der $\mathfrak{R}_1$ einer Parallelellipse wieder eine Ellipse ist, so wählen wir eine $\mathfrak{T}_3$ so, daß sie $\perp$ $\mathfrak{T}_2$ ist und daß die $\mathfrak{R}_3$ sämmtlicher Ellipsen Kreislinien sind. Das ist der Fall, sobald für eine der Ellipsen, z. B. für die Ellipse B, die $\mathfrak{R}_3$ ihrer beiden Halbachsen gleich werden. Da nun für die Ellipse B der $\mathfrak{R}_3$ von β gleich β ist (indem die Halbachse $\beta \parallel \mathfrak{T}_3$ ist), so darf man $\mathfrak{K}'_2$ nur so annehmen, daß der $\mathfrak{R}_3$ von $\alpha = \beta$ wird. Suchen wir nun die $\mathfrak{R}_3$ der Punkte a, b und c, so finden wir den Schnitt einer Parallelellipse, z. B. der Ellipse B, mit der E(abc) mit Hilfe des S (2, 3) nach der Regel dadurch, daß wir durch B eine Fläche, hier am besten die E(B_2) legen, den Schnitt C der E(abc) und der E(B_2) aufsuchen und zusehen, wo C und die Parallelellipse sich schneiden, was hier leicht durch die $\mathfrak{R}_3$ von C und B (da der $\mathfrak{R}_3$ von B die Kreislinie B_3 ist) geschehen kann. Man erhält so d_3 und e_3 als $\mathfrak{R}_3$ der gesuchten Schnittpunkte d und e. Wie man daraus d_2 und e_2, und mittelst dieser $\mathfrak{R}_2$ die $\mathfrak{R}_1$, d_1 und e_1 findet, ist bekannt. Da die Ellipse B das erste Profil unserer OF ist, so sind die Punkte d, e zugleich die ersten Profilpunkte. Nimmt man eine andere Ellipse, z. B. D an, so findet man in ähnlicher Art ihre Schnittpunkte mit der Ebene. Will man die zweiten Profilpunkte unserer Schnittlinie, so findet man diese ganz in derselben Art, wie in der Aufgabe der vorigen Nummer.

NB. Aus der obigen Entwickelung wird leicht hervorgehen, daß sie nur angewendet werden kann, wenn die $\mathfrak{T}_2$ parallel ist mit derjenigen Hauptebene der OF, welche die großen Achsen der Parallelellipsen enthält.

202. Hat man den Durchschnitt einer Ebene mit irgend einer Fläche mit ebenen Ez zu finden, so kann man den Durchschnitt irgend einer Ez der Fläche mit der Ebene dadurch finden, daß man den Durchschnitt der Ebene der Ez mit der gegebenen Ebene sucht, und zusieht, wo dieser Schnitt die Ez schneidet.

202. Gehen wir nun über zu den Durchschnitten von Linien und Flächen, so haben wir zu unterscheiden, ob die Flächen von der Art sind, daß ihre Risse Linien sein können oder nicht. Die einfachste Aufgabe, die im ersteren Falle vorkommen kann, ist die, wo der Durchschnitt einer CF (A_1) mit einer G (B) gesucht wird. Hier ist der gesuchte Punkt derjenige, dessen R_1 im Schnitte von A_1 und B_1 und dessen R_2 natürlich in B_2 liegt. Wir wollen aber noch einige Aufgaben machen, in welchen die gegebene Fläche zum R′ (s. 191.) eine Linie hat.

203. Aufg. Den Durchschnitt einer KF(Aa) mit einer G(B) zu finden. Fig. 61.

Aufl. Ist A eine ebene C, so thun wir am besten, Centralrisse zu benützen, deren Centrum a und deren Tafel die C (A_2) der Linie A ist; dann ist C(A) selbst der R′, A_1 der R'_1 und A_2 der R'_2 unserer KF(Aa). Nun haben wir noch zu suchen den R′ der G (B). Zu dem Ende nehmen wir in ihr zwei Punkte b, c an und suchen ihre R′. Wir haben der Bequemlichkeit wegen den Punkt b so gewählt, daß er in C(A_2) liegt, und daher selbst sein R′ ist; den Punkt c so, daß der R_2 seines St′ mit einer schon gezeichneten Linie zusammenfällt. Suchen wir, wo der St′ des P(c) die C(A_2) trifft, so erhält man c′ durch seine Risse, nemlich c'_1 und c'_2. Zieht man nun B'_1, d. i. $b_1c'_1$, und sucht, wo dieses die A_1 schneidet, so sind diese Punkte d'_1, e'_1 die R'_1 der gesuchten Schnittpunkte. Um nun den Punkt d zu erhalten, muß man bekanntlich seinen St′ (d′a) zeichnen, und zusehen, wo dieser die G (B) schneidet. Eben so hat man zu verfahren, um den P (e) zu erhalten.

Anm. 1. So viele Punkte B'_1 und A_1 gemein haben, eben so viele Punkte hat die KF (Aa) mit B gemein. Berührt B'_1 die A_1, so berührt auch B die KF(Aa).

Anm. 2. Wäre A keine ebene C, so könnte man sich eine solche ebene Schneidlinie verschaffen, wenn man den Schnitt der KF mit einer zu einer Tafel senkrechten Ebene aufsuchte. Da man aber in diesem Falle doch eine C construiren müßte, so könnte man eben so gut durch B eine Ebene, etwa die C (B_2), legen, ihre Schnittlinie mit der KF (Aa) aufsuchen, und zusehen, wo diese Schnittlinie die G (B) schneidet.

Anm. 3. Da die Ez (ad′), also auch der P (d), in Bezug auf die T_2 sichtbar sind, so ist B_2 von d_2 aus rechts zusammenhängend gezogen, während das Stück d_2c_2 gestrichelt ist, weil der P (e) in Bezug auf die T_2 unsichtbar ist. Da ferner die Punkte d und e in Bezug auf die T_1 sichtbar sind (indem dies auch für die Ez gilt, auf denen sie liegen), so ist B_1 von d_1 rechts und von c_1 links zusammenhängend gezogen (s. 192. Anm. 2.).

204. Soll der Durschnitt einer EF mit einer Geraden gefunden werden und ist die Schneidlinie der EF eben, so ist die Auflösung dieser Aufgabe fast dieselbe, wie die vorhergehende, und unterscheidet sich von ihr blos dadurch, daß die St′ nicht durch einen P (a) gehen, sondern mit den Ez der EF parallel laufen. Wir wollen daher die Lösung dieser Aufgabe dem Schüler überlassen.

Fig. 62. 205. Aufg. Den Durchschnitt einer KF (Aa) mit einer Kreislinie B zu suchen, wenn sowohl A als B in einer zur T_1 parallelen Ebene liegt.

Aufl. Lassen wir K_2 mit A_2 zusammenfallen und nehmen Centralrisse zu Hilfe, deren Tafel die T_1 und deren Centrum a ist, so ist A der R′ der KF (Aa). Suchen wir nun noch den R′ von B, und bedenken, daß alle von B ausgehenden St′ eine KF (Ba) bilden, deren Schneidlinie B in einer mit der T_1 parallelen Ebene liegt, so wird man leicht einsehen, daß der R′ der Kreislinie B, d. h. der Schnitt des Strahlenkegels (Ba) mit der T_1, eine Kreislinie B′ ist, deren Mittelpunkt der R′ des Mittelpunktes von B ist, und deren Durchmesser offenbar gleich dem Stück der K_2 ist, welches von dem UR_2 der KF (Ba) eingeschlossen ist. Sucht man nun die Punkte b′, c′, in welchen A und B′ sich schneiden, so sind dies die R′ der gesuchten Punkte. Die Punkte selbst liegen in den Durchschnitten der Kreislinie B mit den St′ b′a und c′a.

Anm. Hätten wir keine R′ zur Lösung unserer Aufgabe benützt, sondern, der allgemeinen Regel nach, durch B eine Fläche, und zwar ihre Ebene, also die E (B_2) gelegt, und den Durchschnitt von E (B_2) mit KF (Aa) gesucht, so wären wir gezwungen gewesen, diese Durchschnittscurve zu construiren, während wir nach unserm obigen Verfahren die Construction einer E umgangen haben. Man sieht aber leicht ein, daß, wenn entweder A oder B

nicht in einer zur $\mathfrak{T}_1$ parallelen Ebene liegt, der $\mathfrak{R}'_1$ von B oder der KF (Aa) eine zu construirende E wäre, und daß wir daher in diesem Falle von der Anwendung der $\mathfrak{R}'$ keinen Vortheil ziehen könnten.

206. Ist der Durchschnitt einer CF (A, || C) und einer Kreislinie B gesucht, wenn wieder A und B in zur $\mathfrak{T}_1$ parallelen Ebenen liegen, so ist die Auflösung der Aufgabe fast dieselbe, wie in der vorigen Nummer, der Unterschied ist blos der, daß hier die St' || C sind, und daß B' denselben Halbmesser hat, wie B. Wir halten es daher für überflüssig, diese Aufgabe hier noch weiter durchzuführen; wohl aber wird der Schüler gut thun, wenn er zur Uebung sie zu lösen sucht.

207. Aufg. Es ist gesucht der Durchschnitt einer DF (A) mit einer Kreislinie B, die so liegt, daß eine durch ihren Mittelpunkt b gelegte Senkrechte zu ihrer Ebene die Achse der DF (A) im P (a) schneidet. Fig. 63.

Aufl. Wir nehmen unser Tafelsystem am besten so an, daß die Achse der DF (A) $\perp \mathfrak{T}_1$ und die Ebene der B $\perp \mathfrak{T}_2$ ist. Nehmen wir nun als Hfl eine Ebene an, so ist ihr Schnitt mit der DF (A) eine E, die wir construiren müssen. Eben so geht es uns, wenn wir eine CF oder KF als Hfl annehmen. Legen wir aber durch B eine Kugelfläche, deren Centrum in a liegt, deren Hauptmeridian daher C ist, so schneidet diese (s. 220. Anm.) die DF (A) nach einer Kreislinie D, die wir leicht zeichnen können, da ihr $\mathfrak{R}_1$, nemlich D_1, wieder eine Kreislinie ist. Suchen wir nun die Punkte, in welchen sich D und B schneiden, so sind dies die gesuchten Schnittpunkte. Die $\mathfrak{R}_2$ dieser Punkte liegen in D_2 und B_2, also in c_2; die $\mathfrak{R}_1$ in D_1 und in ihren $\mathfrak{KL}_1$, also in c_1 und d_1. Man sieht, daß der $\mathfrak{R}_1$ von B, der eine Ellipse ist, entbehrlich ist, weshalb auch in unserer Zeichnung blos B_2 und der Mittelpunkt (b) von B angegeben ist.

Wir wollen diese Aufgabe noch in einem Beispiele anwenden, in welchem sich zwei Flächen nach Ez schneiden, und daher (s. 189.) gesucht wird, wo die Schneidlinie der einen Fläche die andere Fläche schneidet.

208. Aufg. Es ist gegeben eine KF (Aa) und eine KF (Ba), Fig. 64.
welche beide zugleich Drehflächen sind; man sucht ihre Schnittlinie.

Aufl. Wir nehmen hier die Tafeln am besten so an, daß die T_1 senkrecht zur Achse des einen Kegels und die T_2 parallel zu beiden Drehachsen ist. Dann stehen die Ebenen der Schneidlinien A und B $\perp T_2$, und ist die $E(A_2) \parallel T_1$, oder, wenn wir die K_2 durch A_2 gehen lassen, es ist die $E(A_2) \mid T_1$. Da wir nun wissen, daß unsere KF, wegen ihres gemeinsamen Scheitels a, sich nur nach Ez schneiden können, so suchen wir blos den Schnitt von B mit der KF (A), und wir haben ein Beispiel für die Aufgabe der vorigen Nummer. Demnach werden wir eine Kugel C zu Hilfe nehmen, die B enthält und die KF (Aa) nach der Kreislinie D schneidet, so erhalten wir die Punkte c, d, und daraus die gesuchten Schnittlinien ca, da.

Anm. So viele Punkte B und D gemein haben, nach so vielen Ez schneiden sich die Kegel. Berühren sich B und D in einem Punkte c, so berühren sich die KF nach der Ez ca.

209. Soll der Schnitt einer Fläche mit einer G (a_1) gesucht werden, so ist dies dasselbe, als wenn verlangt wird, man soll einen P (a) der Fläche suchen, der a_1 zum R_1 hat. Man kann nun diese Aufgabe nach der Regel lösen, daß man nemlich durch G (a_1) eine Hfl legt u. s. w. Man kann aber in vielen Fällen mit Vortheil ein anderes Verfahren einschlagen, indem man die andere Fassung der Aufgabe, nemlich einen P (a) der Fläche zu suchen u. s. f., dazu benützt. Kann man nemlich schon mittelst des (gegebenen) R_1 des P (a) die durch a gehende Ez der Fläche aufsuchen, so ist damit auch der P (a) bekannt; denn sein R_2 (a_2) liegt dann im R_2 der Ez und im KL_2 dieses Punktes. Ein Beispiel mag hiefür genügen.

Es sei die gegebene Fläche eine DF (A), deren Achse $\perp T_1$ ist, so ist der R_1 des durch den P (a) gehenden Parallelkreises B bekannt, denn man kennt seinen Mittelpunkt und weiß, daß seine Peripherie durch a_1 gehen muß. Sucht man nun B_2, so ist sein Schnitt mit dem KL_2 von a der R_2 des gesuchten Punktes. Eben so ist der R_1 der durch den P (a) gehenden Ez einer CF, KF, CF(A) und OF durch a_1, und der R_2 einer solchen Ez durch a_2 bestimmt. Ist eine Schneidlinie oder die Leitebene einer WF $\perp T_2$, so ist durch a_2 der R_2 einer durch a gehenden Ez bekannt.

210. Hat man, außer den bis jetzt aufgeführten Beispielen, den Schnitt einer Geraden mit einer Fläche zu finden, so nimmt

man eine ihrer LE als Hfl an; hat man den Schnitt einer ebenen E mit einer Fläche zu suchen, so bedient man sich der Ebene der E als Hilfsmittel. Ist aber die E gewunden, so ist die bequemste Hfl die LEF_1 oder LEF_2 (s. 1.) der E. Will man aber die Auflösung durchführen, so muß man erst noch lernen, wie man den Schnitt einer LEF mit einer Fläche aufsucht.

211. Wir sind nun so weit vorbereitet, um zur Aufsuchung der Schnitte von krummen Flächen übergehen zu können. Es ist bereits bekannt, daß man, um diese Aufgaben zu lösen, sucht, wo die Ez der einen Fläche die andere schneiden, und da wir die Aufsuchung der Durchschnitte von Flächen mit Linien schon durchgenommen haben, so werden wir bei den folgenden Aufgaben im Allgemeinen wenig Neues zu bemerken haben. Wenn wir dennoch die wichtigeren Beispiele durchmachen, so geschieht dies deshalb, um in denselben anzugeben, welches die zweckmäßigste Lage des Tafelnsystems ist, und wie man in den einzelnen Fällen die Grenz- und Profilpunkte findet.

Ist die eine der beiden Flächen eine EF und die andere eine Regelfläche, so ist es immer am besten, die eine Tafel, z. B. die T_1, senkrecht zur EF anzunehmen, dann ist der R_1 der EF eine Linie, in der zugleich der R_1 der gesuchten Schnittlinie liegt, und man hat dann leicht finden, wo die Ez der anderen Fläche diese EF schneiden. Denn ist der R_1 der EF mit A_1 bezeichnet, und sucht man, wo diese EF (A_1) die Ez (B) der anderen Fläche schneidet, so liegt der R_1 des Schnittpunktes in A_1 und B_1, sein R_2 in seinem KL_2 und in B_2. Will man die Grenzpunkte der Schnittlinie, so liegen sie in denjenigen Ez, deren R_1 die A_1 berühren.

212. Aufg. Es sind gegeben zwei auf einander senkrechte EF; man soll ihren Schnitt finden. Fig. 65.

Aufl. Wir nehmen hier am besten die Tafeln so an, daß jede auf einer EF senkrecht steht; dann sind der R_1 der einen und der R_2 der andern EF Linien. Es seien nun EF (A_1) und EF (A_2) die beiden gegebenen EF, so ist EF (A_1) die LEF_1, und EF (A_2) die LEF_2 unserer Schnittlinie, demnach liegen ihre Risse beziehungsweise in A_1, A_2. Es ist aber leicht aus unserer Zeichnung zu ersehen, daß nicht die ganze Linie A_1 der R_1 der Schnittcurve sein kann, da z. B. die G (e_1) die EF (A_2) nicht schneidet. Man wird einsehen, daß die Punkte, von denen das KL_1 die A_1

berührt, und das KL_2 mit A_2 wenigstens einen Punkt gemein hat, hier die Punkte a_1, b_1 die Grenzpunkte bilden, wenn man sucht, wo die CF (A_1) von den Cz der CF (A_2) geschnitten werden; daß in ähnlicher Weise die Grenzpunkte, hier c und d, sich herausstellen, wenn man sucht, wo die Cz der CF (A_1) die CF (A_2) treffen. Es sind daher in unserer Zeichnung $c_1a_1d_1$ und $a_2c_2b_2$ die Risse unserer Schnittlinie.

Fig. 66. 213. Aufg. Es sind gegeben zwei CF., die nicht senkrecht auf einander stehen; gesucht ihr Schnitt.

Aufl. Man nimmt die Tafeln am besten so an, daß die eine, z. B. die T_1, senkrecht zur einen CF, und die andere parallel zu beiden CF ist. Es sei nun CF (A_1) die eine und CF (B || C) die andere CF, so liegt der R_1 der gesuchten Schnittlinie in A_1. Da aber dieser R_1 auch in den R_1 der CF (B, || C) fallen muß, so sieht man, daß der gesuchte R_1 der Schnittlinie beider CF aus $\widehat{a_1b_1}$ und $\widehat{c_1d_1}$ besteht, und demnach hier die Schnittlinie selbst aus zwei C besteht, also eine Doppelcurve ist. Da in unserer Figur alle Cz der CF (B, || C) die CF (A_1) schneiden, so giebt es hier keine Grenzpunkte. Die Punkte auf dem Pr_1 der CF (B, || C) erhält man bekanntlich, wenn man sucht, wo dieses Pr_1 (d. h. die Cz ac und bd), die CF (A_1) schneidet. Man erhält daher die Punkte a, b, c und d. Will man die Punkte auf dem Pr_2 der CF (B, || C), so sucht man, wo das Pr_2 dieses Cylinders die CF (A_1) schneidet, und man erhält die Punkte e, f, g und h. Sollen endlich die Punkte auf dem Pr_2 der CF (A_1) gefunden werden, so muß man suchen, wo dieses Profil (d. h. die Cz i_1 und k_1), den anderen Cylinder schneidet. Demnach sind die R_1 dieser Profilpunkte i_1 und k_1; ihre R_2 i_2, k_2, l_2 u. m_2 findet man mit Hilfe der durch die Punkte i_1 und k_1 gehenden R_1 von Cz D, E, F, G der CF (B, || C). Will man noch andere Punkte der gesuchten Schnittlinie, so darf man nur auf der CF (B, || C) Cz annehmen und ihren Schnitt mit der CF (A_1) aufsuchen.

Anm. 1. Hätten nicht alle Cz der CF (B, || C) die CF (A_1) geschnitten, wären also Grenzpunkte vorhanden gewesen, so wären offenbar diejenigen Cz der CF (B, || C) Grenzerzeugende gewesen, deren R_1 die A_1 berühren.

Anm. 2. Wir machen den Schüler darauf aufmerksam, hier wie in den folgenden Aufgaben des vorliegenden §. zu untersuchen,

welche Theile des R_1 oder R_2 der gesuchten Schnittlinie und der Umrisse der gegebenen Flächen gestrichelt werden müssen. Die Anleitung dazu ist oben (192. Anm. 2.) schon allgemein gegeben worden.

214. Hat man den Schnitt einer CF (A_1) mit einer anderen Regelfläche zu suchen, so suche man in derselben Art, wie in der vorigen Nummer, wo die Ez der Regelfläche die CF (A'_1) schneiden. Die Grenzerzeugenden sind wieder die, deren R_1 die A_1 **berühren**. Die Profilpunkte aber findet man, indem man sucht, wo die Profile der einen Fläche die andere schneiden.

215. Aufg. Es sind gegeben zwei KF; man soll ihre Schnittlinie finden. Fig. 67.

Aufl. Wir nehmen eine Ebene an, die auf einer der beiden Tafeln, z. B. auf der T_2 senkrecht steht und suchen den Durchschnitt dieser Ebene mit jeder der beiden KF. Ist dabei die Schneidlinie der einen KF eine ebene C (A), deren Ebene (A_2) auf der T_2 senkrecht steht, so kann man, statt einer beliebigen Ebene, die C (A_2) annehmen; dann ist der Schnitt dieser Ebene mit der einen KF die C (A), und wir brauchen blos die C (B) zu suchen, nach welcher die andere KF von der C (A_2) geschnitten wird. Sind nun A, B die C, nach denen die gegebenen KF die C (A_2) schneiden, a, b ihre resp. Centren, und ist also gesucht der Schnitt der KF (A, a) mit der KF (B, b), so benützen wir zur Lösung unserer Aufgabe R′, deren Strahlen (St′) durch a, und R″, deren Strahlen (St″) durch b gehen, und lassen sowohl für die R′ als für die R″ die C (A_2) als Tafel (T′) gelten. Dann ist der R′ der KF (Aa) die C (A) und der R″ der KF (Bb) die C (B), und liegt demnach der R′ der gesuchten C auf A und ihr R″ auf B. Ferner erhält man den R′ des P (b), wenn man sucht, wo die G (ab) die C (A_2) schneidet; da aber auf dieselbe Art auch der R″ des P (a) erhalten wird, so sieht man, daß der Punkt, in welchem G (ab) die C (A_2) schneidet, sowohl mit b′ als mit a″ bezeichnet werden kann, wie dies in unserer Figur geschehen ist. Denken wir uns nun einen Punkt der gesuchten Schnittlinie mit c bezeichnet, so ist die G (ac) sein St′ und sein R′ (c′) liegt in A; ferner G (bc) sein St″ und sein R″ (c″) liegt in B. Suchen wir den R″ der G (ac), indem wir durch ihn eine StE″ legen, so ist diese StE″ die E (abc);

eben so ist aber auch die St𝔈′ der 𝔊 (bc) die 𝔈 (abc), folglich fällt der $\mathfrak{R}_1'$ der 𝔊 (bc) und der 𝔑″ der 𝔊 (ac) in eine Gerade zusammen. Da aber der 𝔑′ der 𝔊 (bc) die Gerade b′c′ und der 𝔑″ der 𝔊 (ac) die 𝔊 (a″c″) ist, so sieht man, daß die Gerade, welche den 𝔑′ und 𝔑″ eines 𝔓 (c) unserer Schnittlinie enthält, durch den 𝔓 (b′) geht, nach welchem die 𝔊 (ab) die 𝔈 (A_2) schneidet.

Legt man daher umgekehrt durch a″ eine Gerade a″c″, welche mit A den 𝔓 (c′) und mit B den 𝔓 (c″) gemein hat, so giebt es einen Punkt c, dessen 𝔑′ in c′ und dessen 𝔑″ in c″ liegt, der selbst also ein Punkt der gesuchten Schnittlinie. Um ihn zu finden, darf man nur den Schnitt seines St′ und St″, d. h. der 𝔊 (ac′) und der 𝔊 (bc″) suchen, so ist er der 𝔓 (c). Da aber die 𝔊 (a″c″), sowohl A als B, nach zwei Punkten schneidet, so kann man durch sie vier Punkte der Schnittlinie finden.

Anm. Zieht man die durch a″ zu legende Gerade so, daß sie A berührt und B schneidet, so erhält man die Grenzpunkte 1 und 2, deren 𝔑′ zusammenfallen (die $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ dieser Punkte haben wir in unserer Figur nicht aufgesucht, um dieselbe nicht mit zu viel Strichen anzufüllen); eben so erhält man Grenzpunkte (3, 4), wenn man die Gerade durch a″ so legt, daß sie B berührt und A schneidet. Man sieht daher, daß der Bogen 4′ 1′ 3′ der 𝔑′ und der Bogen 2″ 3″ 1″ der 𝔑″ unserer Schnittlinie sind. Zieht man die Gerade durch a″ innerhalb der gefundenen Grenzen, so kann man durch sie immer vier Punkte der Schnittlinie erhalten. Will man einen Profilpunkt der Schnittlinie, so darf man nur die Gerade durch a″ so legen, daß der St′ oder der St″ des zu suchenden Punktes eine 𝔈𝔷 der einen oder anderen 𝔎𝔉 ist, die ein $\mathfrak{Pr}_1$ oder $\mathfrak{Pr}_2$ derselben vorstellt.

Da alles, was über diese Aufgabe noch zu sagen ist, dem Schüler bei der Aufsuchung des Schnittes zweier Pyramiden vorgekommen sein muß, so wollen wir ihn auf jene Aufgabe verweisen (s. * 130.).

216. Hat man den Durchschnitt zweier 𝔈𝔉 zu suchen, von denen keine auf einer Tafel senkrecht steht, so bedient man sich auch der 𝔑′ und 𝔑″, deren Strahlen beziehungsweise zu den 𝔈𝔉 parallel laufen, und deren Tafel wie in der vorigen Aufgabe angenommen wird. Die Auflösung der Aufgabe stimmt dann im

Wesentlichen mit der vorigen überein; nur sind die R′ der Ez der einen CF unter sich parallel (anstatt daß sie in der vorigen Aufgabe durch einen Punkt, den R′ des Centrums b, gingen); eben so sind die R″ der Ez des anderen CF unter sich parallel; endlich sind die R′ der Ez der einen CF parallel zu denen der anderen. Das letztere kommt daher, weil die StE′ der einen Ez sowohl als die StE″ der anderen Ez parallel zu beiden CF also auch selbst parallel werden.

Hat man den Durchschnitt einer KF und einer CF, die nicht senkrecht auf einer Tafel steht, zu suchen, so benutzt man ebenfalls R′, deren St′ parallel zur CF sind, und R″, deren St″ durch das Centrum a der KF gehen. Die Tafel (T′) für diese R′ und R″ wählt man wieder wie in der vorigen Nummer. Dann gehen die R′ der Ez der KF durch den R′ (a′) seines Centrums. Da aber die R″ der Ez der CF durch den Punkt gehen, in welchem eine durch a gelegte Parallele zur CF die T′ schneidet (s. * 73. 14)), so sieht man, daß durch diesen Punkt (a′) sowohl die R′ der Ez der KF als auch die R″ der Ez der CF gehen. Im Uebrigen ist die Auflösung dieselbe wie in der vorigen Nummer.

Hat man den Durchschnitt irgend einer Regelfläche mit einer KF oder CF zu finden, die auf keiner Tafel senkrecht steht, so sucht man wieder die Schnitte der Ez der Regelfläche mit der CF dadurch, daß man R′ zu Hilfe nimmt, die in der Ebene der Schneidlinie der CF oder resp. KF liegen, und deren St′ parallel zur CF laufen oder beziehungsweise durch das Centrum der KF gehen. Nur wird es, wenn die Regelfläche keine CF oder KF ist, schwierig sein (und man wird es daher unterlassen), Grenz- und Profilpunkte direkt aufzusuchen.

Anm. Wir machen wiederholt darauf aufmerksam, daß man die in dieser Nummer angegebenen Aufgaben, in welchen die eine Fläche eine CF ist, auch in der Art lösen kann, daß man eine T_3 zu Hilfe nimmt, auf der die gegebene CF senkrecht steht, auf welcher daher der R_3 der CF eine Linie ist. Ob dieses Mittel oder die Zuhilfenahme von R′ vortheilhafter ist, wird man in jedem besonderen Falle vor der Ausführung der Auflösung zu überlegen haben. Es wird besonders auch mit in Betracht gezogen werden müssen, ob für den Fall, daß keine ebene Schneidlinie für die CF

gegeben ist, und daher erst eine gesucht werden muß, die Auflösung der Aufgabe mit Hilfe der N′ nicht zu verwickelt wird.

Fig. 68. 217. Aufg. Den Durchschnitt einer DF (A) mit einer KF (Ba) zu finden.

Aufl. Wir nehmen hier die T_1 so an, daß sie auf der Achse der DF senkrecht steht, und benutzen, weil die eine der Schnittflächen ein KF ist, N′, deren St′ durch a gehen; dann ist der N′ der KF (Ba) eine Linie. Damit aber die N′ der Parallelkreise sich leicht zeichnen lassen, nehmen wir als Tafel für die N′ eine zur T_1 parallele Ebene, hier die Ebene der B, d. h. die E (B_2) an. Wäre daher die gegebene Schneidlinie des Kegels nicht eben, oder wenn ja, wäre ihre Ebene nicht parallel zur T_1, so würden wir uns vor Allem eine Schneidlinie B suchen, die, wie die gegebene, in einer zur T_1 parallelen Ebene liegt. (Um eine solche Schneidlinie zu finden, hätten wir die schon oben gelöste Aufgabe zu lösen: den Durchschnitt einer KF mit einer EE zu finden). Haben wir nun eine solche Schneidlinie B, so ist diese der N′ unserer KF (Ba), und wie man mittelst der N′ ihren Schnitt mit irgend einem Parallelkreis C findet, haben wir schon früher (205.) gezeigt. Hier haben wir nur noch hinzuzufügen, wie man die Grenz- und Profilpunkte findet.

Wenn, wie in unserer Figur, der P (a) in der Achse der DF (A) liegt, so ist der Strahlenkegel eines beliebigen Parallelkreises C ein Drehungskegel, dessen Achse mit der der DF (A) zusammenfällt. Demnach ist der Mittelpunkt von C′, so wie des N′ eines jeden anderen Parallelkreises in a_1, und folglich derjenige Parallelkreis D Grenzparallelkreis, dessen N′ (D′) die Schneidlinie B berührt, und der Punkt b, in welchem diese Berührung stattfindet, der N′ des Grenzpunktes b. Läge aber das Centrum des gegebenen Kegels nicht in der Achse der DF (A), so hätte der N′ eines jeden Parallelkreises ein anderes Centrum, und demnach wäre es unbekannt, wo der Mittelpunkt des N′ des Grenzparallelkreises liegt. Wir würden daher auf die Auffindung der Grenzpunkte verzichten müssen.

Eben so können wir in unserer Figur, wo a in der Achse der DF (A) liegt, und nur in diesem Falle, leicht die Punkte auf den Profilen der KF (Ba) finden. Denn da wir z. B. wissen, daß die G (ca) dem Pr_2 des Kegels angehört, so darf man nur

denjenigen Parallelkreis E annehmen, dessen $\mathfrak{N}'$ (E') die B in c schneidet.

Will man die Punkte auf dem ersten Profil der DF (A) finden, so darf man nur statt eines beliebigen Parallelkreises denjenigen wählen, der das erste Profil ist, d. h. den größten oder kleinsten, und suchen, wo er die KF (Ba) schneidet.

Was endlich die zweiten Profilpunkte unserer DF (A) betrifft, so müssen wir den Schnitt des Hauptmeridians A mit der KF (Ba) suchen. Da wir aber, um den zu finden, den Schnitt der E (A_1) mit der KF (Ba) suchen müssen, und der hier, wo die E (A_1) durch a geht, aus geraden Ez der KF besteht, so darf man nur die Punkte suchen, in denen die Geraden ad und ae den Meridian A schneiden.

218. Soll der Schnitt einer DF (A) mit einer EF ($B_1 \parallel C$) gesucht werden, so ist die Auflösung fast dieselbe, wie die der vorhergehenden Aufgabe, nur hat man wiederholt den Schnitt eines Parallelkreises mit einer EF zu suchen (s. 206.). Die Grenzpunkte und die Punkte auf den Profilen der EF lassen sich auch bei dieser Aufgabe im Allgemeinen nicht leicht finden. Es ginge dies nur dann ohne viel Umstände, wenn die EF parallel zur Achse der DF wäre. In diesem Falle aber stände die EF $\perp \mathfrak{T}_1$, es wäre demnach der $\mathfrak{N}_1$ der EF eine Linie. Man würde daher keine $\mathfrak{N}'$ brauchen, sondern die $\mathfrak{N}_1$ dafür benutzen. Wir wollen die Lösung dieser Aufgabe dem Schüler überlassen.

219. Will man den Schnitt einer DF mit einer Regelfläche, die keine EF oder KF ist, finden, so nimmt man die $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zur Achse der DF an und sucht, wo die Ez der Regelfläche die DF schneiden. Zu dem Ende benutzt man als Hfl. die LE_2 der Ez der Regelfläche und hat demnach wiederholt die schon bekannte Aufgabe zu lösen, den Schnitt einer E (B_2) mit einer DF zu finden.

220. Soll der Schnitt zweier DF gefunden werden, so wählen wir unser Tafelsystem jedenfalls so, daß die eine Tafel, z. B. die $\mathfrak{T}_1$, auf einer Achse senkrecht steht und die $\mathfrak{T}_2$ mit beiden Achsen parallel ist, und haben wir dann folgende Fälle zu unterscheiden. Es können die Achsen der DF

1) zusammenfallen,
2) parallel laufen,

3) sich schneiden,

4) sich kreuzen.

Im ersten Falle können sich die Flächen nur nach Parallelkreisen schneiden. Sucht man daher die Punkte, in denen sich die Hauptmeridiane der beiden DF, die hier offenbar in einer Ebene liegen und eine gemeinsame Achse haben, schneiden, und legt dadurch Parallelkreise, so sind dies die verlangten Schnittlinien der beiden Flächen.

Anm. Schneiden sich eine DF und eine Kugel, deren Centrum in der Achse der DF liegt, so kann man die Achse der DF auch als Achse der Kugel ansehen (s. 106.), und man hat zwei DF, deren Achsen zusammenfallen. Es geht daraus der Satz hervor:

Wenn das Centrum einer Kugel in der Achse einer DF liegt, so kann sie diese nur nach Parallelkreisen schneiden.

Fig. 69. 221. Aufg. Es sind gegeben zwei DF (A und B) mit parallelen Achsen; man sucht den Schnitt dieser Flächen.

Aufl. Nehmen wir, wie schon oben allgemein angegeben wurde, die T_1 senkrecht zur einen, also auch zur anderen Achse an, so ist die T_2 von selbst zu beiden Achsen parallel, und man kann sie, wie in unserer Figur, noch so annehmen, daß sie zur Ebene der beiden Achsen parallel ist, daß demnach die beiden Hauptmeridiane A und B in einer Ebene, nemlich in der E (A_1) liegen. Suchen wir nun wieder, wo die Ez der einen DF die andere schneiden, und nehmen die Ebenen der Ez, d. i. der Parallelkreise als Hfl an, so sieht man, daß jede unserer Hfl eine Ebene $\|\ T_1$, z. B. die E (C_2) ist, die demnach beide DF nach Parallelkreisen C, D schneidet, deren R_1 Kreislinien C_1, D_1 sind; die Schnitte c, d dieser Kreislinien sind die in der E (C_2) liegenden Punkte der gesuchten E.

Was die Grenzpunkte betrifft, so sind diese hier offenbar die Punkte e, f, in denen sich die Hauptmeridiane A und B schneiden. Denn zieht man die durch e gehenden Parallelkreise, so überzeugt man sich leicht, daß sich diese Parallelkreise in e berühren, daß also der Parallelkreis der einen Fläche die andere berührt. Da e und f zugleich in beiden Hauptmeridianen liegt, so sind diese Punkte zugleich die zweiten Profilpunkte beider DF. Will man ihre ersten Profilpunkte, so darf man nur diejenige Hfl an-

nehmen, die die eine oder andere DF nach dem kleinsten oder größten Parallelkreis schneidet.

Anm. Wäre die T_2 nicht parallel zur Ebene der beiden Achsen, so würde man die Schnittpunkte c, d einer beliebigen Hfl so wie die ersten Profilpunkte in derselben Art, wie oben, aufgesucht haben, nur würden dann die R_2 der in einer Hilfsebene liegenden Punkte nicht zusammenfallen. Um bei dieser Lage der T_2 die Grenzpunkte zu finden, müßten wir eine T_3 zu Hilfe nehmen, die zur Ebene der beiden Achsen parallel ist, und jeder Schnitt der R_3 der neuen Hauptmeridiane wäre der R_3 eines Grenzpunktes. Die so gefundenen Grenzpunkte fielen mit den zweiten Profilpunkten nicht zusammen. Wollte man diese direkt suchen, so müßte man bekanntlich suchen, wo das zweite Profil der einen Fläche die andere schneidet. Da aber hierbei die Construction einer E nothwendig würde, so thäte man besser, die R_1 der zweiten Profilpunkte annäherungsweise, wie schon früher gesagt worden, dadurch zu finden, daß man sucht, wo der R_1 der gesuchten Schnittlinie den R_1 des Pr_2, d. h. A_1 oder B_1 schneidet.

222. Aufg. Es sind gegeben zwei DF (A und B), deren Achsen sich schneiden; man sucht ihre Schnittlinie. Fig. 70.

Aufl. Wir nehmen wieder die Tafeln so an, daß die T_1 senkrecht zur einen Achse und die T_2 parallel zu beiden Achsen ist, so liegen die beiden Hauptmeridiane A und B in einer Ebene, nemlich in der E (A_1). Wir suchen nun (nach 207.) wo die Parallelkreise der DF (B) die DF (A) schneiden. Demnach ist hier jede Hfl eine Kugel (C), deren Mittelpunkt in dem Schnitt a der beiden Achsen liegt und die beide DF nach den Parallelkreisen D, E schneidet. Die Schnittpunkte b, c dieser Kreise sind die gesuchten Punkte.

(Man wird in der Zeichnung sehen, daß man den R_1 des Kreises E nicht zu zeichnen braucht, was um so erwünschter ist, als dieser R_1 eine Ellipse würde).

Die Grenzpunkte sind hier, aus demselben Grunde wie in der vorigen Nummer, die Schnittpunkte der Meridiane, und demnach sind diese Punkte auch hier zugleich die zweiten Profilpunkte der beiden DF. Um die ersten Profilpunkte zu finden, muß man wieder die Hfl so annehmen, daß sie die eine oder andere Fläche nach einem größten oder kleinsten Parallelkreis schneidet.

Fig. 71. 223. Aufg. Es sind gegeben zwei DF (A und B), deren Achsen sich kreuzen; gesucht ihre Schnittlinie.

Aufl. Wir nehmen hier wieder die T_1 senkrecht zur einen Achse und die T_2 parallel zu beiden Achsen an, und suchen, wo die Ez der DF (A), d. i. der DF, deren Achse senkrecht zur T_1 steht, die DF (B) schneiden. Um nun z. B. zu finden den Schnitt des Parallelkreises C mit der DF (B), legt man durch C die E (C_2), sucht ihren Schnitt mit der DF (B), und wo dieser Schnitt und C sich schneiden, da sind die gesuchten Schnittpunkte. Zur Auffindung des Schnittes der E (C_2) mit der DF (B) aber müssen wir ein S (2, 3) benutzen, dessen T_3 auf der Achse der DF (B) senkrecht steht, und aus den R_3 und R_2 dieses Schnittes (die man mittelst der S (2, 3) hier in derselben Weise findet, wie in Nr. 199. mittelst des S (1, 2)) den R_1 desselben so weit aufsuchen, als nothwendig ist, um die R_1 (b_1, c_1) der gesuchten Punkte finden zu können. Auf dieselbe Art findet man die Schnitte anderer auf der DF (A) angenommener Parallelkreise mit der DF (B), und somit den Schnitt der beiden DF. Auf eine direkte Aufsuchung der Grenzpunkte müssen wir hier verzichten.

Die ersten Profilpunkte der DF (A) finden wir, indem wir suchen, wo der größte oder kleinste Parallelkreis der DF (A) die DF (B) schneiden. Der erste Profilpunkt der DF (B) hat für uns kein Interesse, da, wie aus unserer Figur ersichtlich ist, das erste Profil dieser DF nicht gezeichnet ist. Die Punkte auf dem Pr_2 dieser DF hingegen finden wir wieder am einfachsten dadurch, daß wir zuerst ihre R_1 aufsuchen.

§. 14.

Tg und Asymptoten an Schnittcurven.

224. Soll in einem Punkte a des Schnittes zweier Flächen eine Tg an diesen gelegt werden, so wird sie im P (a) beide Flächen berühren und demnach in den beiden TE liegen, die im P (a) an die beiden Flächen möglich sind. Unsere Tg muß aber auch auf den im P (a) zu unseren Flächen möglichen zwei N senkrecht stehen. Demnach bieten sich uns zwei Mittel, um für einen P (a) der Schnittlinie zweier Flächen die Tg zu finden:

1) Wir legen im P (a) an jede der beiden Flächen eine TE, deren Schnitt die gesuchte Tg ist.

2) Wir legen im P (a) zu jeder der beiden Flächen eine N, so ist die Gerade, welche zur Ebene dieser beiden N im P (a) senkrecht steht, die gesuchte Tg.

Anm. 1. Ist die eine der beiden sich schneidenden Flächen eine Ebene, so ist sie selbst ihre TE im P (a); man hat daher in diesem Falle nur zu suchen den Durchschnitt der gegebenen Ebene mit der TE der anderen Fläche im P (a).

Anm. 2. Wenn die beiden Flächen sich im P (a) berühren, so fallen für diesen Punkt die beiden TE zusammen und bieten uns daher kein Mittel, die Tg zu finden.

225. Soll die Asymptote einer Schnittcurve gesucht werden, so muß es einen Punkt des Schnittes geben, der in unendlicher Entfernung liegt. Sucht man nun die Ebenen, welche die beiden sich schneidenden Flächen in dem unendlich fernen Punkte berühren, so ist ihre Schnittlinie die gesuchte Asymptote. Schneiden sich aber die Ebenen in unendlicher Entfernung, d. h. sind die beiden Ebenen parallel, so liegt die Asymptote in unendlicher Entfernung, d. h. es giebt keine Asymptote. Fielen die beiden Ebenen in eine zusammen, in welchem Falle die beiden gegebenen Flächen sich selbst in unendlicher Entfernung berührten, so würden wir nur eine Ebene haben, in der die Asymptote liegt, und demnach diese nicht angeben können.

226. Beschränken wir uns darauf, die Asymptoten von C zu suchen, nach denen sich zwei geradlinige Flächen schneiden, und suchen wir vor Allem, ob es einen Punkt der Schnittlinie giebt, der in unendlicher Entfernung liegt. Giebt es einen solchen Punkt und wir denken uns durch ihn auf jeder der beiden Flächen eine Gerade gezogen, so kann jede von diesen Geraden ganz und gar in unendlicher Entfernung liegen oder nicht. Liegen die beiden Geraden nicht in unendlicher Entfernung, so müssen sie parallel laufen. Es giebt daher drei Fälle, in welchen es einen unendlich fernen Punkt des Schnittes zweier geradliniger Flächen giebt:

1) Wenn es auf der einen Fläche eine Gerade giebt, die mit einer Geraden der anderen Fläche parallel ist;

2) wenn es auf der einen Fläche eine Gerade giebt, welche eine unendlich ferne Gerade der anderen Fläche schneidet;

3) wenn es auf der einen Fläche eine unendlich ferne Gerade giebt, welche eine unendlich ferne Gerade der anderen Fläche schneidet.

227. Wollen wir uns darauf beschränken, die Asymptoten für den Fall zu suchen, daß die eine der gegebenen Flächen eine Ebene und die andere entweder eine CF oder eine WF zweiter Ordnung ist.

Ist nun die krumme Fläche eine CF, so finden wir, daß nur dann eine Gerade der CF mit einer Geraden der Ebene parallel ist, wenn die Ebene die CF nach Geraden schneidet; in diesem Falle werden aber keine Asymptoten gesucht. Schneidet daher eine Ebene eine CF nach einer C, so kann es nur dann Asymptoten geben, wenn die Ebene von einer in unendlicher Ferne liegenden Cz der CF geschnitten wird. Sucht man dann die Ebene, welche die CF nach der unendlich fernen Cz berührt (nimmt man die T_1 ⊥ CF an, so ist der R_1 dieser Ebene eine Gerade, welche eine Asymptote zum R_1 der CF ist), so ist ihr Schnitt mit der gegebenen Ebene die gesuchte Asymptote.

228. Ist gegeben eine KF und eine Ebene (E), und soll die Asymptote ihres Schnittes aufgesucht werden, so suchen wir die Cz der KF, welche || E ist. Zu dem Ende legen wir (s. 196. Anm.) durch das Centrum der KF eine Ebene || E, so ist jede Cz (A), welche diese Hilfsebene mit der KF gemein hat, parallel zur E, und schneidet also die E, folglich die Schnittcurve, in unendlicher Entfernung. Sucht man nun die Ebene, welche die KF nach einem solchen unendlich fernen Punkte berührt, so berührt diese Ebene die KF nach der durch diesen Punkt gehenden Cz der KF, also nach der Cz (A), welche || E ist.

1) Wir erhalten demnach die Asymptote des Schnittes einer KF mit einer Ebene (E), wenn man an die KF eine TE legt, welche die KF nach einer zur E parallelen Cz (A) berührt; der Durchschnitt dieser TE mit der E ist die verlangte Asymptote.

Giebt es daher keine Ez (A) || E, oder ist die eben genannte TE || E, so giebt es keine Asymptote. Aus dem eben ausgesprochenen Satze geht noch folgender hervor:

2) Die Asymptote des Schnittes einer KF mit einer E ist parallel zu der Ez der KF, welche || E ist.

Anm. 1. Wenn man, um die zur E parallele Ez der KF aufzusuchen, durch das Centrum der KF eine Ebene (E′) || E legt und die E′ berührt die KF nach der Ez (A), die sie mit ihr gemein hat, so wird die TE der KF für die Ez (A) mit E′ zusammenfallen, also || E sein. Wenn aber die KF von E′ nach A geschnitten wird, so wird die genannte TE die E schneiden.

Es giebt also so viel Asymptoten für unsere Schnittcurve, als es Ez giebt, nach denen die E′ die KF schneidet.

Anm. 2. Eine unendlich ferne Gerade der KF giebt es nicht. Wohl aber kann es eine Ebene geben, welche die KF nach einer Geraden und die E nach einer unendlich fernen Geraden schneidet (s. 226. 2)), und welche man erhält, wenn man durch eine Ez der KF eine Ebene || E legt. Diese Ebene ist aber dann unsere E′ und die Ez der KF, welche sie enthält, die Ez (A), und demnach der unendlich ferne Punkt, auf den wir dadurch geführt werden, derselbe, für den wir schon die Asymptote gesucht haben. Es giebt also keine Asymptote weiter, als die schon angegebene.

229. Soll die Asymptote für den Schnitt einer Ebene (E) mit einer WF (A, B, T_1) (wo A und B gerade Linien sein sollen), gefunden werden, so suchen wir wieder die Ez (C) der WF, welche || E ist. Da diese Ez auch parallel zur Leitebene, also || T_1, sein muß, so ist die G (C) parallel zur S_1 (D) der E. Es muß daher die G (C) die Geraden A und B schneiden und mit D parallel sein, und kann daher (nach * 57.) gefunden werden. Sucht man die TE der WF, welche ihren Berührungspunkt in dem unendlich fernen Punkte von C hat, d. i. (nach 130.) welche durch C geht und || T_1 ist, so ist der Schnitt dieser TE mit E eine Asymptote unserer Schnittcurve, und es ist daher diese Asymptote parallel zur S_1 (D) der E.

Suchen wir nun eine gerade SchL unserer WF, welche || E ist, so müssen wir durch einen beliebigen Punkt, am Besten einen Punkt von E, Parallele zu allen geraden SchL unserer WF legen, wodurch wir (Anh. 11.) eine Ebene (E′) erhalten, welche

parallel zu A und B ist; ihr Durchschnitt (E) mit E ist parallel zur verlangten SchL. Da bekanntlich die R_2 aller Schneidlinien durch den Punkt gehen müssen, in welchem sich A_2 und B_2 schneiden, so ist unsere SchL, die || E sein muß, leicht zu finden. Legen wir nun durch diese SchL eine TE der WF, deren Berührungspunkt der unendlich ferne Punkt von E ist, d. h. eine Ebene, die parallel zu E′ ist, so ist der Durchschnitt dieser TE mit E′ ebenfalls eine Asymptote.

Anm. Da wir wissen, daß unsere Schnittcurve zweiter Ordnung ist, so wissen wir, daß es nicht mehr als zwei Asymptoten für sie geben kann; da wir nun eben die Mittel angegeben haben, um zwei Asymptoten zu finden, so müssen die ferneren Mittel zur Aufsuchung von Asymptoten (s. 226. 2) und 3)) auf die schon gefundenen führen, und brauchen daher nicht angewendet werden. Dagegen haben wir zu bemerken, daß, wenn die oben genannte zur T_1 Parallele zur G(D) auch parallel ist zur Ebene E′, also parallel zum Schnitt der beiden Leitebenen (Anh. 11.) unserer WF, so muß auch E zu diesem Schnitt parallel laufen, und es liegt die zu D parallele Ez, so wie die zu E parallele SchL (s. Anh. 13.) folglich auch jede Asymptote in unendlicher Entfernung. Wir erhalten daher in diesem Falle eine offene E ohne Asymptoten, also (weil die E zweiter Ordnung ist) eine Parabel.

Wir sehen also, daß der Schnitt einer Ebene mit einem windschiefen Paraboloid entweder eine Parabel oder Hyperbel, also nie eine Ellipse ist.

230. Will man eine Asymptote des Schnittes einer Ebene (E) mit einer WF (A, B, a_2) (wo A und B wieder gerade Linien vorstellen), so sucht man wieder die Ez (C) und die SchL (D) auf, welche || E sind. Zu dem Ende legt man durch einen beliebigen Punkt der E Parallele zu allen Ez der WF, wodurch man den Leitkegel unserer WF erhält. Da aber dieser Kegel, eben so wie die WF, zweiter Ordnung ist, so wird er mit der E entweder 1) keine Gerade gemein haben, oder 2) er wird von E nach einer Geraden berührt oder 3) nach zwei Geraden C, D geschnitten.

Im Falle 3) giebt es auf der WF zwei Ez (E, F), welche mit den Geraden C, D beziehungsweise parallel sind und sich leicht zeichnen lassen, da ihre R_2 durch a_2 gehen müssen. Legt man sowohl durch E als durch F eine asymptotische Ebene der WF

(s. 130.), so sind die Schnitte dieser beiden asymptotischen Ebenen mit der E die gesuchten Asymptoten. Mehr kann es nicht geben, da die E zweiter Ordnung, also eine Hyperbel ist.

Im Falle 1) ist die Schnittcurve geschlossen, also eine Ellipse, (ausnahmsweise eine Kreislinie).

Im Falle 2) aber ist die E zwar offen, aber die asymptotische Ebene ist || E, und daher keine Asymptote vorhanden, Die E ist daher eine Parabel.

231. Aufg. Es sei gegeben eine Drehungs-KF (Aa) und eine E (B_2); es soll für einen P (b) des Schnittes dieser beiden Flächen die Tg, und sollen die Asymptoten der Schnittcurve gesucht werden. Fig. 72.

Aufl. Legt man (in Fig. a) im P (b) eine TE an die KF und sucht den Schnitt dieser TE mit der E (B_2), so ist er (224. Anm. 1.) die gesuchte Tg. Zieht man daher durch b die Ez ac der KF und legt in c eine Tg (C) an A, so ist der Schnitt der TE (Ca) mit der E (A_2) die verlangte Tg (B). Da aber von dieser Tg schon ein Punkt (b) bekannt ist, so darf man nur noch einen Punkt suchen, am besten den P (d), in welchem E (B_2) von der G (C) geschnitten wird. Die G (bd) ist dann die verlangte Tg.

Soll aber die Asymptote des Schnittes gefunden werden, so legen wir (nach 228.) durch a eine E (D_2) || E (B_2), und wir erhalten so viel Asymptoten, als es Gerade giebt, nach denen die E (D_2) die KF schneidet. Da aber in Figur a) die E (D_2) keine Ez der KF enthält, so schneidet die E (B_2) nach einer geschlossenen E; da in Figur b) die E (D_2) zwar eine Ez (D) der KF enthält, aber nach dieser berührt, so ist hier die Schnittcurve zwar offen, aber nicht asymptotisch. In Figur c) hingegen schneidet die E (D_2) die KF nach zwei Ez (D und E), es giebt daher zwei Asymptoten. Um eine derselben zu finden, suchen wir (nach 128.) die TE (DG), welche die KF nach der Ez (D) berührt; der Schnitt (B) dieser TE mit der E (B_2) ist eine solche Asymptote. Benutzen wir statt D die G (E), so erhalten wir eine zweite Asymptote.

Anm. Weiß man, daß die KF (Aa) von der E (B_2) nur nach einer Linie zweiter Ordnung geschnitten werden kann, so geht aus der eben aufgelösten Aufgabe hervor, daß die Schnittlinie in Figur a) eine Ellipse, in Figur b) eine Parabel, in Figur c) eine

Hyperbel ist. Wir haben aber im Anhange auch durch Rechnung nachgewiesen, daß in den drei Fällen die drei genannten C als Schnitte erscheinen (s. Anh. 6.)

Fig. 73. 232. Es sei A der Grath einer EF und T_1 so angenommen, daß sie die Krümmungsebene von A im P (a), also auch die TE der EF im P (a) ist (s. 128.). Nimmt man nun eine E (B_1) so an, daß ihr N_1 (B_1) durch a_1 geht und normal zu A_1 ist, und sucht im P (a) die Tg des Schnittes (B) der E (B_1) mit der EF (A), so wird sie erhalten, wenn man in a eine TE an die EF (A) legt und ihren Schnitt mit der E (B_1) sucht. Da aber die TE die T_1 ist, so sieht man, daß die Tg der Schnittlinie B im P (a) die G (B_1) selbst ist. Hieraus folgt aber weiter, daß die N der C (B) im P (a) die G (a_1) ist, und demnach die Nachbarpunkte von a auf *einer* Seite der N des P (a) liegen, und so sieht man, daß die C (B) in a einen Grath hat. Wir haben also den Satz:

Jede EF (A) wird von einer Ebene, die in einem P (a) der C (A) auf dieser Curve normal steht, nach einer C(B) geschnitten, die in a einen Grath hat.

Aus diesem Grunde haben wir die C (A) der EF den Grath dieser Fläche genannt.

§. 15.

Entwickelung entwickelbarer Flächen.

*233. Wenn man die Elemente einer Fläche so in eine Ebene legt, daß die Elemente selbst keine Gestaltsänderung erleiden und je zwei Nachbarelemente die ihnen gemeinsame Ez gemeinschaftlich behalten, so nennt man diese Operation *das Entwickeln der Fläche*.

Man sieht daher (aus dem Umstande, daß bei dem Entwikkeln keine Gestaltsänderung der Flächenelemente eintreten darf), daß sich diese Operation *nur* mit solchen Flächen vornehmen läßt, die ebene Elemente haben. Deshalb haben Flächen mit ebenen Elementen den Namen *entwickelbare Flächen* erhalten.

234. Ist auf einer EF eine C gegeben, so bekommt diese, wenn man die EF entwickelt, eine andere Gestalt. Man nennt die C, die durch die Entwickelung einer EF aus einer auf dieser

Fl gegebenen C sich bildet, die **Verwandelte** der gegebenen C.

235. Jede C auf einer CF wird durch die Erzeugenden derselben in unzählige Elemente getheilt, deren jedes auf einem Flächenelement liegt. Da nun beim Entwickeln der Fläche ihre Elemente sich nicht ändern, so ändern sich auch die Längen der in ihnen liegenden C-Elemente nicht. Betrachtet man daher die Länge eines von den Punkten a, b begrenzten Stückes der gegebenen C vor und nach der Entwickelung als Summe ihrer Elemente, was angeht, da sowohl vor als nach der Entwickelung je zwei Nachbarelemente in einem Punkte zusammenstoßen, so kommt man zu folgendem Satze:

Die Länge einer C auf einer CF zwischen irgend zwei Punkten derselben wird durch das Entwickeln der Fläche nicht geändert.

236. Aus dem Umstande, daß durch das Entwickeln der CF die einzelnen Elemente unverändert bleiben, geht auch hervor, daß die Lage eines Elements einer auf der CF gegebenen C gegen die Ez des Flächenelements, in der es liegt, sich nicht ändert, daß also der Winkel, den das C-Element mit diesen Ez bildet, nach und vor der Entwickelung der nemliche ist. Erwägen wir nun, daß die Richtung eines C-Elements die seiner Tg ist, und daß die beiden Ez eines Flächenelements in der Zeichnung in eine zusammenfallen, so haben wir den Satz:

Der Winkel, unter welchem eine Ez einer CF eine auf dieser liegende C schneidet, ändert sich durch die Entwickelung nicht.

237. In der Regel ändern sich durch das Entwickeln einer CF die Krümmungen einer auf der CF liegenden C. Denn es ändert sich die gegenseitige Lage von zwei Nachbarelementen der C, da sie in der Regel auf zwei Nachbarelementen der CF liegen, und diese durch die Entwickelung ihre gegenseitige Lage ändern. Liegen aber zwei Nachbarelemente der C auf **demselben** Element der CF, so ändern sie ihre gegenseitige Lage bei der Entwickelung nicht. Dies ist aber der Fall bei dem Grath der CF; denn bekanntlich liegt jedes Element dieser C auf einer Ez, also zwei Nachbarelemente der C auf zwei Nachbar-Ez, demnach auf **einem** Element der CF. Wir haben also den Satz:

Durch das Entwickeln einer EF ändern sich in der Regel die Krümmungen einer darauf liegenden C; nur der Grath ändert seine Krümmungen durch das Entwickeln nicht.

Anm. Ist daher der Grath einer EF eine Schraubenlinie, die bekanntlich in allen ihren Punkten gleiche Krümmungen hat, so hat die Verwandelte der Schraubenlinie auch nach der Entwickelung in allen Punkten dieselbe Krümmung, und wird demnach eine Kreislinie, deren Halbmesser gleich dem Krümmungshalbmesser irgend eines Punktes der Schraubenlinie ist.

238. Sollen zwei Nachbarelemente ba, ac einer C auf einer EF nach der Entwickelung in eine Gerade fallen, so müssen sie mit der durch a gehenden Ez (A) nach (also auch vor) der Entwickelung gleiche Winkel bilden; die beiden Geraden ba und ac können demnach als Ez eines Drehungskegels betrachtet werden, der A zur Achse hat. Da aber ba und ca benachbart sind, so ist die E(bac), welche offenbar die Krümmungsebene der C im P(a) ist, eine TE des genannten Drehungskegels. Ferner ist die E (A, ba) eine Meridianebene dieses Kegels, und steht demnach auf der E (bac) senkrecht. Da aber G (ba) eine Tg der C, folglich der EF ist, so ist E (A, ba) eine TE der EF. Aus dem Ganzen geht nun aber hervor, daß, wenn ba und ac gleiche Winkel mit A machen, die Krümmungsebene der C für den P(a) auf der TE der EF für diesen Punkt senkrecht steht. Eben so läßt sich aber auch der umgekehrte Satz nachweisen. Wir haben also den Satz:

Damit zwei Nachbarelemente ba, ac einer C auf einer EF nach deren Entwickelung in eine Gerade fallen, der P (a) also ein Flachpunkt werde, ist es nothwendig aber auch gerade hinreichend, daß die Krümmungsebene der C im P (a) NE der EF für den P (a) sei.

239. Nimmt man auf einer EF zwei Punkte a und b an, und denkt sich auf der EF von a nach b beliebige Linien gezogen, so verändern diese, wie wir oben gezeigt haben, bei dem Entwickeln der EF ihre Längen nicht. Demnach wird die, welche vor der Entwickelung die kürzeste unter ihnen war, es auch nach der Entwickelung sein. Daraus geht aber hervor, daß die kürzeste Linie, welche auf der EF von a nach b gezogen werden kann, diejenige

ist, deren Verwandelte eine Gerade ist. Ist aber dies der Fall, so fallen je zwei Nachbarelemente der C nach der Entwickelung in eine Gerade, folglich sind, nach dem in der vorigen Nummer entwickelten Satz, alle Krümmungsebenen der C TE der CF. Wir haben daher den Satz:

Die kürzeste Linie, die auf einer CF zwischen zwei Punkten derselben möglich ist, ist diejenige, deren Verwandelte eine Gerade ist, oder, was auf dasselbe hinausgeht, diejenige, deren Krümmungsebenen NE der CF sind.

240. Wir haben früher (118.) gesehen, daß jeder C (A) eine Evolutenfläche entspricht, die eine CF ist, auf welcher unzählige Evoluten der C liegen. Jede N der C (A) ist eine Tg und jede NE derselben eine TE der CF. Nimmt man nun auf der C (A) einen P (a) an, legt durch ihn eine TE an die CF und zieht in dieser durch den P (a) eine G (B), so ist diese eine Tg für die CF und eine N der C (A) im P (a). Zieht man ferner von einem P (b) der C (A), welcher dem P (a) benachbart ist, eine Tg (C) an die CF, welche die G (B) in einem P (c) schneidet, so ist der P (c) ein Punkt einer Evolute (D) der C (A), und die E (BC), weil B und C benachbarte Tg der Evolute D sind, die Krümmungsebene der C (D) im P (c). Diese E (BC) ist aber auch, weil sie durch die Nachbarpunkte a und b der C (A) geht, TE dieser C und daher auf der durch den P (a) gehenden NE der C (A) senkrecht. Da aber diese NE zugleich TE der CF ist, so sieht man, daß die E (BC) im P (c) zur CF normal steht. Man sieht daraus, daß alle Krümmungsebenen der Evolute D NE der CF sind, und hat den Satz:

Jede Evolute einer C hat nach der Entwickelung der Evolutenfläche eine Gerade zur Verwandelten.

241. Aufg. Eine CF und eine darauf liegende C, die in einer zur CF senkrechten Ebene liegt, sind gegeben; man soll nach der Entwickelung der CF die Verwandelte der C angeben.

Aufl. Da die C in einer auf der CF senkrechten Ebene liegt, so sind alle Krümmungsebenen dieser C NE der CF, demnach die Verwandelte der C eine Gerade, und da diese mit der Cz der CF nach und vor der Entwickelung dieselben Winkel bildet, so ist

die Verwandelte der C eine Gerade, die nach der Entwickelung der CF auf deren Cz senkrecht steht.

242. Ist aber die Verwandelte einer anderen C, z. B. der C (A) gesucht, so benützen wir zur Aufsuchung ihrer Verwandelten die C, nach welcher die CF von einer auf ihr senkrechten Ebene geschnitten wird und deren Verwandelte wir schon kennen, in einer Weise, die wir weiter unten angeben werden. Zuvor wollen wir aber, um uns bequemer ausdrücken und die zusammengehörigen Punkte leichter bezeichnen zu können, noch Folgendes bemerken. Bei dem Entwickeln einer CF betrachten wir diese als Oberfläche eines materiellen Körpers, der also ein gekrümmtes Zeichnungsblatt vorstellt, und setzen fest, auf welcher Seite dieser Oberfläche (die also die Stelle einer unebenen dritten Tafel vertritt), die Materie liegt. Wir wollen daher auch den Durchschnitt unserer gekrümmten T_3 (die wir der Kürze wegen mit $\widehat{T}_3$ bezeichnen wollen) mit der T_1 die $\widehat{K'}$ nennen, welche, wenn wir die $\widehat{T}_3$ nach der Entwickelung derselben umklappen, zweimal erscheint; einmal in der T_1, in $\widehat{K'}_1$, und einmal in der entwickelten und umgeklappten $\widehat{T}_3$, als Verwandelte der $\widehat{K'}$ in K'_3*). Nennen wir den Theil unserer CF oder überhaupt der CF, der im + Raum der T_1 liegt, positiv, und geben an, wohin, nach der Umklappung unserer $\widehat{T}_3$, d. i. nach der Entwickelung der CF, die + und − $\widehat{T}_3$ fallen; nennen wir ferner den Raum unserer $\widehat{T}_3$, in welchem das Auge des Zeichners liegt, den + Raum der $\widehat{T}_3$, den, in welchem die Materie unseres gekrümmten Zeichnungsblattes sich befindet, den − Raum der $\widehat{T}_3$, endlich den Theil der T_1, der im + Raum der $\widehat{T}_3$ liegt, positiv, den andern negativ, so wird das Aufsuchen der einzelnen Punkte der Verwandelten, mit dem Aufsuchen der R_3 von Punkten, die in der T_3 liegen, so ziemlich übereinstimmen, nur ist hier die Ab'_1 eines Punktes ein auf der $\widehat{K'}_1$ gemessener Bogen, während die ihr gleiche Ab'_3 desselben Punktes eine auf der K'_3 gemessene Strecke ist.

Fig. 74. 243. Aufg. Es ist gegeben eine CF (A_1) und eine darauf liegende C (A); gesucht die Verwandelte der C (A) nach der Entwickelung von CF (A_1).

---

*) Wir schreiben hier K'_3 und nicht $\widehat{K'}_3$, weil die Verwandelte der K' eine Gerade ist.

Aufl. Nennen wir den Schnitt der CF (A_1) mit der darauf senkrechten T_1 die $\widehat{K'}$ und klappen die als T_3 betrachtete CF (A_1) so um, daß die $\widehat{K'}$ nach K'_3 und + T_3 so zu liegen kommt, wie in unserer Figur angegeben ist, und suchen nun die R_3 von beliebigen Punkten a, b, c der C (A). Ziehen wir das L_1 des P (a), so ist dieses, da der P (a) in der T_3 liegt, zugleich das $\widehat{KL'_3}$ dieses Punktes, und ist aus demselben Grunde a_1 zugleich sein $\widehat{KR'_1}$. Suchen wir nun den KR'_3 dieses Punktes, den wir noch willkürlich in K'_3 annehmen dürfen, ziehen das KL'_3 und tragen darauf von a'_3 aus eine Länge $a'_3 a_3$ gleich dem A_1 des P (a) auf, und zwar hier positiv, da dieser A_1 positiv ist, so bekommen wir a_3 als R_3 des P (a). Suchen wir den R_8 des P (b), und zu dem Ende zuerst seinen KR'_3 (b'_3), so müssen wir $\overline{a'_3 b'_3} = \widehat{a_1 b_1}$ machen; aber es ist noch uns überlassen, auf welche Seite der K'_3 wir von a'_3 aus die Länge $a'_3 b'_3$ auftragen. Setzen wir aber voraus, daß in dem hohlen Raume der CF (A_1) seine Materie und auf seiner converen Seite sein + Raum, also die + T'_1 liegt, so wird man sich, wenn man die T_3 wieder aufklappt, leicht überzeugen, daß dann b'_3 in unserer Figur rechts von a'_3 erscheinen muß. Zieht man noch $b'_3 b_3$ und macht $\overline{b'_3 b_3}$ gleich dem A_1 des P (b), so erhält man b_3. Macht man $\overline{a'_3 c'_3} = \widehat{a_1 c_1}$, zieht $c'_3 c_3$ und macht $\overline{c'_3 c_3}$ gleich dem A_1 des P (c), so erhält man c_3. Auf dieselbe Art kann man so viele R_3 von Punkten der C (A) finden, als man will.

Will man den Flachpunkt der Verwandelten finden, so müssen wir (nach 238.) denjenigen Punkt der C (A) suchen, in welchem die Krümmungsebene der C (A), d. i. die E (A_2), eine NE der CF (A_1). Wir dürfen daher nur eine TE der CF (A_1) suchen, die ⊥ E (A_2) ist. Da diese TE aber ⊥ T_1 ist, so ist sie senkrecht zur S_1 der E (A_2), also auch || T_2. Es sind demnach die Punkte b_1 und d_1, in welchen der R_1 der CF (A_1) von zur K_1 Parallelen berührt wird, die R_1 der Punkte, deren Verwandelte Flachpunkte werden.

Will man für einen P (b) der C (A) nach der Entwickelung der CF (A_1) die Tg finden, so darf man sich nur erinnern, daß diese Tg mit der durch a gehenden Ez nach und vor der Entwickelung denselben Winkel bildet. Sucht man daher diese Tg vor der Entwickelung, hier die G (B), und den Winkel, den sie

mit der Ez (b_1) bildet, und zieht B_3 so durch b_3, daß es mit der G ($b_3 b'_3$) den gefundenen Winkel bildet, so ist B_3 die Tg an der Verwandelten A_3 in P (b_3). Um aber den Winkel der Geraden b_1 und B zu finden, muß man bekanntlich eine T_4 zu Hilfe nehmen, die die beiden Geraden enthält (also hier die E (B_1), und nach der Umklappung dieser T_4 die R_4 der beiden Geraden zeichnen; es ist nun zweckmäßig, diese T_4 so umzuklappen, daß B_1 auf K'_3, b_1 auf b'_3 und daher b_4 auf b_3 fällt. Will man nun den R_4 der G (B), so sucht man außer dem R_4 des P (b), den man schon kennt, am besten den R_4 des in der T_1 liegenden Punktes (e) der G (B), denn der R_4 dieses Punktes fällt offenbar in K'_3 nach e_4 so, daß $\overline{b'_3 e_4} = \overline{b_1 e_1}$ ist. Dadurch fällt B_4 mit der gesuchten Tg B_3 zusammen.

Anm. Obgleich wir in unserer Figur beispielsweise eine Kreislinie als R_1 und eine Gerade als R_2 unserer E (A) genommen haben, so gilt doch alles oben Gesagte ganz allgemein, welche Gestalt auch die Risse der E (A) haben mögen. Nur das, was über die Bestimmung der Flachpunkte d_3, c_3 gesagt wurde, setzt eine ebene E (A) voraus. Ist aber, wie in unserem Beispiele, A_1 eine Kreislinie und A_2 eine Gerade, so wird man sich leicht überzeugen können, daß die vier Bögen $\widehat{a_3 b_3}$, $\widehat{b_3 c_3}$, $\widehat{c_3 d_3}$, $\widehat{d_3 a_3}$ kongruent sind.

244. Soll eine EF, die nicht senkrecht auf der T_1 (oder T_2) steht, entwickelt werden, so nimmt man eine T_5 zu Hilfe, die auf der EF senkrecht steht, und man verfährt dann, so weit es sich um die Aufsuchung der Verwandelten handelt, wie in der vorhergehenden Nummer mit Vertauschung der Zahlen 1 und 5. Sollten aber die Tg und Flachpunkte gesucht und vorausgesetzt werden, daß die E (A) eben ist, so müßte man noch eine T_6 zu Hilfe nehmen, die auf der T_5 und auf der Ebene der E (A) senkrecht steht, und dann könnten wir uns wieder an die Entwickelungen in der vorigen Nummer halten, nur haben wir 5 statt 1 und 6 statt 2 zu setzen. Da wir den Uebergang von einem System zu einem anderen als bekannt voraussetzen (s. * §. 4.), so wollen wir die Durchführung der vorliegenden Aufgabe dem Schüler überlassen.

Fig. 74. 245. Aufg. Auf einer EF (A_1) soll eine E (A) gesucht werden, deren Verwandelte auf der entwickelten EF (A_1) gegeben ist.

Aufl. Behalten wir die in der Nummer 243. eingeführten Benennungen und Beziehungen bei, und ist K'_3, a'_3, A_3, $+T'_3$ und $+T'_1$ bekannt, so ist unsere Aufgabe dieselbe, als wenn wir es mit einer ebenen T_3 zu thun hätten, nur sind unsere $\widehat{Ab'_1}$ auf der krummlinigen K'_1 zu messen. Sind daher a_1 und a_2 die Risse eines Punktes der CF, dessen R_3 in a_3 liegt, und suchen wir aus dem R_3 eines P (b) seinen R_1 und R_2, so ziehen wir $b_3b'_3$, machen $\widehat{a_1b_1} = a'_3b'_3$ (und tragen diese Länge auf die Seite von a_1, die der Lage der $+T'_1$ und $+T'_3$ entspricht), so haben wir b_1; tragen wir noch auf das KL_2 des P (b) von der K_2 aus die $O_2 = O'_3$ auf, so haben wir b_2.

Soll die Tg für den P(b) gesucht werden, wenn ihr $R_3(B_3)$ bekannt ist, so dürfen wir nur (umgekehrt wie in der vorletzten Nummer) B_1 in b_1 an A_1 tangirend ziehen und $e_1b_1 = e_4b'_3$ machen, so ist G (eb) die gesuchte Tg.

245. Ist dieselbe Aufgabe wie in der vorigen Nummer für den Fall zu lösen, daß die Verwandelte (A_3) der gesuchten C (A) eine Gerade ist, und sucht man wie dort außer dem P (a) die beiden Punkte b und c, so sieht man leicht, daß, wenn der P (b) sich bis zum P (c) bewegt, der Bogen (b_1c_1) in demselben Verhältnisse zunimmt, wie der A_1 des P (b). Daraus geht hervor, daß wenn, wie in unserer Figur, A_1 eine Kreislinie ist, die C(A) eine Schraubenlinie wird. Man kann daher auch sagen Fig. 75.

1) jede Linie auf einer Drehungs-CF, deren Verwandelte eine Gerade ist, ist eine Schraubenlinie;
2) die Schraubenlinie ist auf ihrer CF die kürzeste Linie zwischen zweien ihrer Punkte (239.).

Anm. Diese beiden Sätze bieten in der Anwendung Mittel zur Zeichnung einer Schraubenlinie auf einer CF. Spannt man nemlich einen Faden oder Draht so, daß er auf der CF aufliegt, so bildet er zwischen zweien seiner Punkte die kürzeste Linie, also eine Schraubenlinie, und man darf nur die Linie, die der Faden vorstellt, nachzeichnen. Ferner: wickelt man um den Cylinder einen Bogen Papier, der gerade den Umfang der CF umfaßt, nachdem man voraus eine Gerade darauf gezeichnet hat, so geht diese in eine Schraubenlinie über. Man darf in beiden Fällen nur darauf sehen, daß die erhaltene Schraubenlinie die verlangte Ganghöhe hat.

Fig. 76. 246. Eine Drehungs-KF (Aa) mit einer darauf liegenden E (B) (von der nur der R_2 gezeichnet ist), zu entwickeln, wenn deren Achse auf der T_1 senkrecht steht.

Aufl. Betrachten wir wieder die KF (Aa) als krumme dritte Tafel ($\widehat{T}_3$) und ihren Schnitt mit der T_1, hier die Kreislinie A, als $\widehat{K}'$, so ist A_1 die $\widehat{K}'_1$, während die Verwandelte der A die $\widehat{K}'_3$ ist. Da aber alle Punkte der A gleichweit von a entfernt sind, und es auch nach der Entwickelung blieben, so ist die Verwandelte der A eine Kreislinie. Klappen wir daher unsere $\widehat{T}_3$ so um, daß a nach a_3 kommt, so wird $\widehat{K}'_3$ eine aus a_3 mit einem Halbmesser gleich ab'_1 beschriebene Kreislinie. Demnach gehen hier die KL'_1 der Punkte der E (B) durch a_1 und die KL'_3 durch a_3. Ferner gilt hier wie bei einer schiefen T_3, in der ein Punkt liegt, der Satz, daß die O'_1, die O'_3 und der A_1 eines Punktes die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks bilden, dessen Hypotenuse die O'_3 ist. Soll daher der R_3 eines Punktes, des P (b) z. B., gefunden werden, so hat man dieselben Operationen aufeinander folgen zu lassen, wie für den Fall, wo die T_3 mit der T_1 einen Winkel bildet und den Punkt, dessen R_3 gesucht wird, enthält. Nur sind hier die Ab' nicht gerade Strecken, sondern Bögen. Es sei z. B. der R_3 des P (c) der E (B) zu suchen, und soll b' als Ursprung betrachtet werden. Aus c_2 findet man c_1 mittelst des durch c gehenden Parallelkreises C. Um nun c_3 zu erhalten, zieht man $c_1c'_1$ durch a_1, macht $\widehat{b'_3c'_3} = \widehat{b'_1c'_1}$, zieht $a_3c'_3$ und trägt darauf von c'_3 aus die O'_3 des P (c), oder was dasselbe ist, von a_3 aus gegen c'_3 hin die Entfernung des P (c) vom P (a). Da aber der P (a) von allen Punkten des Parallelkreises C gleichweit absteht, und die Entfernung des P (a) von d gleich $\overline{a_2d_2}$ ist, so darf man nur auf $a_3c'_3$ die Länge $\overline{a_3c_3} = \overline{a_2d_2}$ auftragen, um c_3 zu erhalten.

Will man den Flachpunkt der Verwandelten von A, so muß man wieder (s. 138.) eine TE der KF suchen, die auf E (B_2) senkrecht steht oder mit einer auf der E (B_2) senkrechten G (D) (die man der Bequemlichkeit wegen gleich durch a legt), parallel ist. Sucht man daher die S_1 (e) der G (D) und zieht eine Tg (E) an B, so ist die E (Ea) die verlangte TE und der P (f), in welchem die Berührungslinie dieser TE die E (B) schneidet, der

Punkt, der durch die Entwickelung der KF (Aa) zum Flachpunkt auf der E (B) wird.

Soll für einen Punkt, z. B. P (c), der E (B) die Tg nach der Entwickelung gefunden werden, so sucht man diese Tg vor der Entwickelung, indem man im P (c) die TE (Fa) an die KF (Aa) legt; der Schnitt cg dieser Ebene mit der E (B_2) ist die verlangte Tg. Nun hat man den Winkel, den cg und ac bilden, aufzusuchen und eine G (c_3g_3) so zu zeichnen, daß $\wedge a_3c_3g_3 = \wedge acg$ ist. Um aber dies leicht ausführen zu können, klappen wir die E(acg) gleich so um, daß ac′ nach $a_3c'_3$, daher die G (c′g) nach c'_3g_3 kommt, dann ist c_3g_3 schon die Tg an der Verwandelten von E (B) im P (a).

247. Hat man eine Drehungs-KF (Aa) nebst der Verwandelten von A, und soll umgekehrt eine E (B) gesucht werden, deren Verwandelte B_3 bekannt ist, so wird man aus der vorigen Nummer leicht erkennen, daß man hier nur den Weg zurück zu machen hat, den man dort vorwärts zu gehen hatte, um sowohl aus dem R_3 eines Punktes den R_1 und R_2 zu finden, als auch, um aus dem R_3 einer Tg den R_1 und R_2 derselben zu finden. So wird man z. B. aus c_3 mittelst der G (a_3c_3) c'_3 und, wenn man $\widehat{b_1c'_1} = \widehat{b_3c'_3}$ und $\overline{a_2d_2} = \overline{a_3c_3}$ macht, die Ez (ac′) und den Parallelkreis C des P (c), und daraus diesen Punkt selbst finden. Fig. 76.

248. Aufg. Eine KF (Aa), deren Schneidlinie A eine in der T_1 liegende E sein soll, ist gegeben; man soll die Verwandelte dieser Schneidlinie finden.

Aufl. Man theile die E (A) in so viele Theile, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$, $\widehat{de}$ u. s. w., daß man dieselben annäherend als gerade und demnach die Dreiecke bac, cad, dae u. s. w. als Flächenelemente betrachten kann, so darf man nur die Dreiecke bac, cad, dae u. s. w. so nebeneinander umgeklappt konstruiren, daß sie die gemeinschaftlichen Seiten gemeinschaftlich behalten, um die Punkte b_3, c_3, d_3 u. s. w. der Verwandelten A_3 von A zu erhalten. Fig. 77.

Will man eine Tg für einen Punkt der Verwandelten, z. B. b_3, finden, so sucht man wieder zuerst die Tg (B) an A im P (b) und klappt die E (Ba) so um, daß dadurch B mit der gesuchten Tg B_3 zusammenfällt. Demnach muß $\overline{ab}$ auf $\overline{a_3b_3}$ zu liegen kommen. Um nun außer dem P (b_3) noch von einem anderen Punkte der G (B), z. B. m, die Lage nach der Umklappung der E (Ba)

zu finden, darf man nur seine Entfernungen ma, mb von den Punkten a, b messen, und der gesuchte Punkt m_3 liegt dann so, daß $\overline{m_3a_3} = \overline{ma}$ und $\overline{m_3b_3} = \overline{mb}$ ist.

Soll der Flachpunkt der verwandelten von A gesucht werden, so benutzen wir wieder, wie in der vorigen Nummer, eine TE, die auf der E(A_2), also hier auf der T_1 senkrecht steht und demnach eine durch a_1 gehende und A_1 berührende Gerade zum R_1 hat.

NB. Es ist klar, daß die vorliegende Aufgabe in einer Weise gelöst ist, woraus sich schließen läßt, daß das gewonnene Resultat nur annähernd richtig ist. Allein wenn man die Aufgabe so lösen will, wie es in anderen Lehrbüchern (z. B. im Gugler) angegeben ist, so muß man dabei so viele E construiren, daß das Resultat noch viel unzuverlässiger ist, als das nach unserer Lösung gewonnene.

249. Will man eine KF (Aa), die keine DF ist, mit einer auf ihr liegenden E (B), die nicht mit ihrer S_1 zusammenfällt, entwickeln, so betrachten wir ihre S_1 (A) als $\widehat{K'}$ und die Verwandelte dieser S_1 als $\widehat{K'_3}$. Legen wir nun durch einen P (c), dessen R_3 (c_3) wir suchen sollen, eine Ez (ac), welche die $\widehat{K'}$ in c′ trifft und suchen (wie in Nr. 246.) c'_3 aus c'_1, ziehen $a_3c'_3$ und tragen auf diese Gerade $\overline{a_3c_3} = \overline{ac}$ auf, so erhalten wir c_3.

Da in der Anwendung die Entwickelung anderer EF nicht vorkommt, so wollen wir den vorliegenden §. und mit ihm die Aufgaben über krumme Linien und Flächen beschließen.

Anhang.

Anhang.

1. Wenn man das Bildungsgesetz einer ebenen C durch einen analytischen Ausdruck bestimmen will, so bedient man sich gewöhnlich zweier in der Ebene der C beliebig gezogenen Geraden (Coordinatenachsen, Achsen), die auf einander senkrecht stehen, und von denen die eine mit X bezeichnet wird und daher die X Achse heißt, während die andere, mit Y bezeichnete, die Y Achse genannt wird. Der Durchschnitt der beiden Achsen, den man mit O bezeichnet, führt den Namen Ursprung. Jede der beiden Achsen wird von dem Ursprung in zwei Theile getheilt, die man dadurch unterscheidet, daß man die eine positiv (+), die andere negativ (—) nennt, wodurch man eine + X und eine — X, eine + Y und eine — Y Achse erhält. Fig. 78.

Um nun mittelst dieser Achsen eine C zu bestimmen, giebt man eine Gleichung an, in welcher mit x die Entfernung eines beliebigen Curvenpunktes von Y und mit y die Entfernung desselben Punktes von X bezeichnet ist, während die übrigen Buchstaben gegebene Längen vorstellen. Soll nun diese Gleichung eine gewisse C bestimmen (in welchem Falle sie die Gleichung dieser C heißt), so muß, wenn man statt x und y die Entfernungen eines beliebigen Punktes der C von den Achsen Y und X setzt, die Gleichung wahr sein. Nur ist dabei vorausgesetzt, daß man die Entfernung x positiv oder negativ zu nehmen hat, je nachdem der Curvenpunkt mit der + X oder der — X Achse auf einer Seite der Y liegt; daß in ähnlicher Weise y positiv oder negativ genommen wird, je nachdem der Curvenpunkt mit der + Y oder der — Y Achse auf einer Seite der X Achse sich befindet. So z. B. wird in unserer Figur für den P (a) das x und das y positiv, für den P (b) das x negativ und das y positiv, für den P (c) das x und das y negativ, für den P (d) das x positiv und das y negativ zu nehmen sein.

NB. Man kann alle die Längen, welche durch die Buchstaben in der Gleichung einer C vorgestellt sind, durch begrenzte Gerade geben; man kann sie aber auch alle nach einem gemeinschaftlichen Maßstabe messen und jede Länge dadurch bestimmen, daß

man durch eine Zahl angiebt, wie viel Längeneinheiten sie enthält. In diesem Falle sind bei jedem besonderen Falle die gegebenen Längen durch Zahlenwerthe zu geben.

2. Wenn man auf die eben beschriebene Art die Linien zweiter Ordnung bestimmt, so erhält man:

1) als Gleichung der Ellipse, wenn man die X Achse mit der großen Achse und die Y Achse mit der kleinen Achse, also den Ursprung mit dem Mittelpunkt der Ellipse zusammenfallen läßt, und mit α die große, mit β die kleine Halbachse bezeichnet:

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} \;;$$

2) als Gleichung der Parabel, wenn man die X Achse mit der Achse der Parabel zusammenfallen, die Y Achse durch ihren Scheitel gehen läßt und mit α ihren Parameter (d. i. die Sehne der Parabel, welche durch ihren Brennpunkt geht und auf ihrer Achse senkrecht steht) bezeichnet, und alle Parabelpunkte positive x haben:

$$y = \pm \sqrt{\alpha x} \;;$$

3) als Gleichung der Hyperbel, wenn man die X Achse in die immaginäre, daher den Ursprung in den Mittelpunkt der Hyperbel legt, und mit α die reele, mit β die immaginäre Halbachse bezeichnet:

$$y = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{x^2 - \alpha^2} \,.$$

3. Verlangt man eine Hyperbel, deren Achsenverhältniß $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ gegeben ist, und deren reele Halbachse $= 0$ ist, oder, was dasselbe sagt, deren Scheitel zusammenfallen, so erhält man als Gleichung derselben:

$$y = \pm \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) x \,,$$

eine Gleichung, welche zwei durch den Ursprung gehende Gerade vorstellt, die mit der $+$ X Achse Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten beziehungsweise gleich $+ \frac{\beta}{\alpha}$ und $- \frac{\beta}{\alpha}$ sind *).

*) Die Bögen, welche diese Winkel messen, müssen so gezogen werden, daß sie in der $+$ X Achse anfangen, von da gegen die $+$ Y Achse hin geführt werden, bis sie die entsprechende Gerade treffen und dann aufhören.

Dieselbe Gleichung : $y \pm \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) x$ erhält man auch, wenn man die Gleichung der Asymptoten einer Hyperbel sucht, deren Gleichung in der vorigen Nummer unter 3) aufgeführt ist.

4. Auf analytischem Wege findet man, daß, wenn für die drei Linien zweiter Ordnung mit α und β dasselbe bezeichnet wird, wie in den beiden vorhergehenden Nummern, die absolute Länge (d. h. Anzahl der Längeneinheiten ohne Rücksicht auf das Vorzeichen) des Krümmungshalbmessers

1) einer Ellipse

a) in einem Scheitel der großen Achse $= \frac{\beta^2}{\alpha}$,

b) in einem Scheitel der kleinen Achse $= \frac{\alpha^2}{\beta}$,

2) einer Parabel in ihrem Scheitel $= \frac{\alpha}{2}$,

3) einer Hyperbel in einem ihrer Scheitel $= \frac{\beta^2}{\alpha}$ ist.

4) Für den Scheitel des $\mathfrak{K}_2$ einer Schraubenlinie auf einem Drehungscylinder, der $\perp \mathfrak{T}_1$ ist, wenn wir mit α die Ganghöhe, mit β den Umfang ihres $\mathfrak{K}_1$ und mit γ den Halbmesser dieses $\mathfrak{K}_1$ bezeichnen, ist die absolute Länge des Krümmunghalbmessers $= \frac{\alpha^2\gamma}{\beta}$.

5. Mitunter sollen zwei Punkte a und b so durch einen Curvenbogen verbunden werden, daß die Geraden ac und bc in den Punkten a und b normal zu ihr stehen, der $\mathfrak{P}$(c) auf der hohlen Seite der $\mathfrak{C}$ liegt und der Bogen zwischen ac und bc eingeschlossen ist, ohne daß die $\mathfrak{C}$ selbst näher bestimmt wird. Sind dann zufällig $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ einander gleich, so kann man die beiden gegebenen Punkte durch eine aus c beschriebene Kreislinie verbinden; wo nicht, so nimmt man zur Verbindung derselben zwei Kreislinien ($\widehat{ad}$ und $\widehat{db}$, mitunter auch mehr), die sich berühren und deren Mittelpunkte e und f beziehungsweise in den Geraden ac und bc liegen, und nennt die Verbindungscurve $\widehat{ab}$ einen **Korbbogen**. Um nun die Punkte e und f zu erhalten, verfahren wir folgendermaßen: Fig. 79.

Wir ziehen durch c eine $\mathfrak{G}$ (ch) $\perp$ $\mathfrak{G}$ (ab) und durchschneiden die drei Geraden ca, ch und cb durch eine beliebige

aus c beschriebene Kreislinie in den Punkten g, h und k; zieht man nun ad || gh und bd || hk, so ist der Schnitt d dieser eben gezogenen Geraden der Berührungspunkt der gesuchten Kreislinie. Zeichnet man durch d eine Parallele zur Geraden ch, so sind die Punkte e, f, in denen sie die gegebenen Geraden schneidet, die Mittelpunkte der gesuchten Kreisbögen $\widehat{ad}$ und $\widehat{db}$. Denn es ist $\triangle$ ade $\sim$ $\triangle$ chg, weil die Seiten dieser Dreiecke paarweise parallel sind; eben so $\triangle$ bdf $\sim$ $\triangle$ ckh, folglich $\overline{ae} = \overline{ed}$ und $\overline{df} = \overline{bf}$. Außerdem sieht man leicht ein, daß sich die Bögen ad und db berühren, da ihre Mittelpunkte e, f mit d in einer Geraden liegen.

Anm. 1. Der eben geführte Beweis für die Richtigkeit unserer Construction, ist unabhängig von dem Umstande, daß ah $\perp$ ab ist. Man hätte in der That dieselbe Construction auch durchführen können, wenn auch ch nicht $\perp$ ab gewesen wäre. Allein es ist deshalb vortheilhaft, diese beiden Geraden auf einander senkrecht stehen zu lassen, weil dann (wie sich leicht erweisen läßt, was wir aber der Kürze wegen unterlassen) das Verhältniß $\overline{df} : \overline{de}$ möglichst klein wird, und demnach der plötzliche Uebergang im P (d) von einer Krümmung zu einer anderen, dem Auge am wenigsten auffällt.

Anm. 2. Wenn der Punkt l, in welchem sich die Geraden ch und ab schneiden, nicht zwischen a und b fällt, ist unsere Aufgabe unmöglich.

Fig. 80. 6. Wir wollen uns durch Rechnung überzeugen, daß eine Drehungs-KF (A) von einer Ebene, die nicht durch ihr Centrum geht, nach einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel geschnitten wird. Zu dem Ende wollen wir die T_1 senkrecht zur Achse (a_1) der KF und die T_2 senkrecht zur schneidenden E (B_2) annehmen, und die K_1 so, daß sie durch a_1 geht.

1) Liegt die E (B_2) so (wie in Fig. a.), daß sie alle Ez der KF schneidet, so sind die Punkte m und n, nach welchen der Hauptmeridian unserer KF von der E (B_2) geschnitten wird, Punkte unserer Schnittlinie. Sucht man nun noch mittelst des Parallelkreises C die in ihm liegenden Punkte b und c, deren R_2 in dem P (b_2) ist, der in der Mitte von $\overline{m_2n_2}$ sich befindet, so ist, wenn wir annehmen, daß unsere Schnittlinie eine Ellipse ist, $\overline{b_2m_2}$ die große und $\overline{b_1b_1}$ die kleine Halbachse. Setzen wir daher

$\overline{b_2 m_2} = \alpha$ und $\overline{b_1 b_1} = \beta$, so ist nach einem bekanntem Satze der Planimetrie: $\beta^2 = \overline{e_1 b_1} \times \overline{b_1 f_1}$, oder $\beta^2 = \overline{e_2 b_2} \times \overline{b_2 f_2}$. Eben so ist aber auch für einen beliebigen P (d) der E, der im Parallelkreis D liegt, $\overline{d_1 c_1}^2 = \overline{g_2 d_2} \times \overline{d_2 h_2}$. Betrachtet man nun die Gerade mn als X Achse und die G (b_2) als Y Achse, so ist $\overline{b_2 d_2}$ das x und $d_1 c_1$ das y des beliebigen Punktes d unserer Schnittcurve, und wir haben demnach: $\beta^2 = \overline{e_2 b_2} \times \overline{b_2 f_2}$ und $y^2 = \overline{g_2 d_2} \times \overline{d_2 h_2}$. Nun lassen sich aber aus unserer Figur folgende Proportionen ableiten:

$\overline{e_2 b_2} : \overline{g_2 d_2} = \alpha : (\alpha \pm x)$ und

$\overline{b_2 f_2} : \overline{d_2 b_2} = \alpha : (\alpha + x)$; man erhält daher durch Verbindung dieser beiden Proportionen

$$\beta^2 : y^2 = \alpha^2 : (\alpha^2 - x^2)$$

und daraus: $y^2 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 (\alpha^2 - x^2)$, in welcher Gleichung noch dem x und y eines Punktes, je nach seiner Lage, die entsprechenden Vorzeichen zu geben sind. Da aber in dieser Gleichung x und y im Quadrat vorkommen, so sieht man, daß sie keine Aenderung erleidet, welche Vorzeichen auch x oder y haben, und daß sie demnach die Gleichung unserer E ist. Vergleicht man diese Gleichung mit der oben (2.) für die Ellipse angegebenen so sieht man, daß unsere Schnittcurve eine Ellipse ist.

2) Ist die E (B_2) so beschaffen, daß sie beide Kegelmäntel schneidet (wie in Figur b, in der wir blos die R_2 aller Punkte und Linien gezeichnet haben), und lassen wir wieder die G (mn) die X Achse, die G (b_2) die Y Achse sein, so ist, wenn wir dieselbe Lage der T_2 wie in der Figur a) voraussetzen, der A_2 des beliebigen Punktes d unserer Schnittcurve $= y$, $\overline{b_2 d_2} = x$ und $y^2 = \overline{g_2 d_2} \times \overline{d_2 h_2}$; eben so ist für den P (c), wenn wir mit x′ und y′ für ihn das bezeichnen, was für den P (d) mit x und y bezeichnet worden ist, $y'^2 = \overline{e_2 c_2} \times \overline{c_2 f_2}$. Aus der Figur gehen aber wieder, wenn wir $\overline{b_2 m_2} = \alpha$ setzen, folgende Propositionen hervor:

$\overline{g_2 d_2} : \overline{e_2 c_2} = (x + \alpha) : (x' + \alpha)$ und

$\overline{d_2 h_2} : \overline{c_2 f_2} = (x - \alpha) : (x' - \alpha)$; man erhält daher durch Verbindung dieser Propositionen folgende: $y^2 : y'^2$

$= (x^2 - \alpha^2) : (x'^2 - \alpha^2)$ oder es giebt $\frac{y^2}{x^2 - \alpha^2}$ für alle Curvenpunkte dieselbe Zahl; setzen wir nun

$$\frac{y^2}{x^2 - \alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2},$$ (welche Gleichung wieder unabhängig vom Vorzeichen von x und y ist, da diese wieder im Quadrat erscheinen) und vergleichen diese Gleichung mit der oben (2.) für die Hyperbel angegebene, so sieht man, daß unsere Schnittcurve eine Hyperbel ist.

3) Ist diese E(B_2) parallel zur G (A) der KF (wie in Fig. c, in welcher wir wieder die $\mathfrak{R}_1$ weggelassen haben, aber voraussetzen, daß die $\mathfrak{T}_2$ wieder den Hauptmeridian A enthält), und lassen wir wieder G (b_2) die Y Achse und die G (B_2) die X Achse sein, so ist für den P (d) : $y^2 = \overline{g_2 d_2} \times \overline{d_2 h_2}$ und für den P (c) $y'^2 = \overline{e_2 c_2} \times \overline{c_2 f_2}$, also auch $y^2 : y'^2 = \overline{d_2 h_2} : \overline{c_2 f_2}$, da $\overline{g_2 d_2} = \overline{e_2 c_2}$ ist. Es ist aber auch $\overline{d_2 h_2} : \overline{c_2 f_2} = x : x'$, folglich auch $y^2 : y'^2 = x : x'$. Nehmen wir nun an, daß wir unsere + X Achse so wählen, daß sie von b_2 in die Richtung von d_2 geht, so sind alle x positiv, und da die y in der letzten Proportion im Quadrat stehen, so gilt auch sie mit Berücksichtigung der Vorzeichen und sagt uns, daß $\frac{y^2}{x}$ für alle Curvenpunkte dieselbe Zahl giebt. Bezeichnen wir diese Zahl mit α, so haben wir die Gleichung : $\frac{y^2}{x} = \alpha$. Vergleichen wir diese mit der oben (2.) angegebenen Gleichung der Parabel, so überzeugen wir uns, daß unsere Schnittcurve eine Parabel ist.

Wir sehen also, daß ein Drehungskegel von einer Ebene nach keiner anderen Curve geschnitten werden kann, als nach einer Linie zweiter Ordnung; man nennt diese Linien daher auch Kegelschnittlinien.

Fig. 81. 7. Ist G (a_1) die Achse, G (A) eine zur $\mathfrak{T}_2$ parallele gerade Ez und der P (a) das Centrum eines Drehungshyperboloids, und läßt man noch $\mathfrak{K}_1$ durch a_1 und $\mathfrak{K}_2$ durch a_2 gehen, so findet man einen beliebigen Punkt c des Hauptmeridians unserer DF auf folgendem Wege: Man nimmt auf der G (A) einen beliebigen P (b) des Hyperboloids an und legt durch ihn den Parallelkreis C, so ist der P (c), in welchem dieser die $\mathfrak{T}_2$ schneidet, ein Punkt

des genannten Hauptmeridians, der mit seinem $\mathfrak{R}_2$ (c_2) zusammenfällt. Nehmen wir nun, um die Gleichung unseres Hauptmeridians zu finden, $\mathfrak{K}_2$ als X Achse und a_2 als Ursprung an, so ist $\overline{b_2 b_2} = \overline{c_2 c_2} = y$ und $\overline{a_1 b_1} = \overline{a_1 c_1} = \overline{a_2 c_2} = x$ des $\mathfrak{P}$ (c); ferner ist $b_1 b_1 = a_1 d_1$. Setzen wir nun $a_1 d_1 = \alpha$, so ist:

$$\overline{a_2 b_2}^2 = \overline{a_1 b_1}^2 = x^2 - \alpha^2 \text{ und}$$

$$\frac{y}{a_2 b_2} = \frac{\beta}{\alpha},$$ d. h. das Verhältniß $y : \overline{a_2 b_2}$ ist unveränderlich, denn es ist dieses Verhältniß die trigonometrische Tangente des Winkels (f. 3.), den $b_2 a_2$ mit $\mathfrak{K}_2$ oder X bildet; dieses Verhältniß ist aber unveränderlich und kann daher mit $\frac{\beta}{\alpha}$ bezeichnet werden. Es ist demnach auch:

$$\frac{y^2}{x^2 - \alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

Da diese Gleichung wieder unabhängig vom Vorzeichen der darin enthaltenen Elemente ist, weil alle darin im Quadrat vorkommen, so sieht man, daß der Hauptmeridian eines Drehungshyperboloids eine Hyperbel ist.

Da ferner A_2 der halbe Hauptmeridian des asymptotischen Kegels ist und die trigonometrische Tg des Winkels, den A_2 mit X bildet, eben $= \frac{\beta}{\alpha}$ gefunden wurde, so sieht man (f. 3.), daß der Hauptmeridian des asymptotischen Kegels aus den Asymptoten zu dem Hauptmeridian des Hyperboloids besteht.

8. Wenn man in der Ebene eines Dreiecks abc eine Gerade zieht, welche die drei Seiten*) des Dreiecks in den drei Punkten d, e, f schneidet, so nennt man eine solche Gerade eine Transversale des Dreiecks abc. Lassen wir nun die Geraden $\overline{ae}$, $\overline{eb}$, $\overline{bg}$, $\overline{gc}$, $\overline{cf}$, $\overline{fa}$, von denen jede ein Stück einer Dreiecksseite vorstellt, das ein Eck des Dreiecks und einen Schnittpunkt e, f oder g der Transversale zu Grenzen hat, in der eben angeschriebenen Ordnung aufeinander folgen, nemlich so, daß der Endpunkt

*) Unter Seite eines Dreiecks wollen wir jede (unbegrenzte) Gerade verstehen, die durch zwei Eckpunkte desselben geht.

einer Geraden zugleich der Anfangspunkt der folgenden ist, so ist das Produkt der ersten, dritten und fünften Geraden gleich dem der übrigen, d. h.

es ist $\overline{ae} \times \overline{bg} \times \overline{cf} = \overline{eb} \times \overline{gc} \times \overline{fa}$.

Um sich hiervon zu überzeugen, ziehe man durch ein Eck des Dreiecks eine Parallele zur gegenüberstehenden Seite, z. B. bh || ac, so erhält man dadurch zwei Paar ähnliche Dreiecke, in deren jedem (Paar) drei der oben genannten Geraden als (durch Eckpunkte begrenzte) Seiten vorkommen. Sucht man mittelst der Aehnlichkeit der Dreiecke zwei Proportionen abzuleiten, in deren jeder drei der obigen Geraden als Glieder vorkommen, so kann man durch Verbindung derselben unseren Satz erweisen. Es ist nemlich

$\overline{ae} : \overline{eb} = \overline{af} : \overline{bh}$ und

$\overline{bg} : \overline{cg} = \overline{bh} : \overline{cf}$, folglich auch

$\overline{ae} \times \overline{bg} : \overline{eb} \times \overline{gc} = \overline{af} : \overline{cf}$ und

$\overline{ae} \times \overline{bg} \times \overline{cf} = \overline{eb} \times \overline{gc} \times \overline{af}$.

Anm. Man erhält dasselbe Resultat und auf demselben Wege, gleichviel, ob welche von den Punkten e, f, g zwischen den Ecken des Dreieckes liegen oder nicht.

Fig. 83. 9. Sind a, b, c und d vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, und nimmt man auf jeder der Geraden ab, bc, cd, da (welche ein unebenes (windschiefes) Viereck bilden), einen Punkt so an, daß die dadurch erhaltenen vier Punkte e, f, g, h in einer Ebene liegen, so ist, wenn man die Geraden $\overline{ae}$, $\overline{eb}$, $\overline{bf}$, $\overline{fc}$, $\overline{cg}$, $\overline{gd}$, $\overline{dh}$, $\overline{ha}$ wieder in der Ordnung aufeinander folgen läßt, daß jede Gerade zum Endpunkt den Anfangspunkt der folgenden hat, das Produkt der ersten, dritten, fünften und siebenten Geraden gleich dem Produkte der übrigen, d. h. es ist

$\overline{ae} \times \overline{bf} \times \overline{cg} \times \overline{dh} = \overline{eb} \times \overline{fc} \times \overline{gd} \times \overline{ha}$.

Denn legt man durch zwei von den Punkten e, f, g, h eine Gerade, und eben so durch die beiden übrigen, zieht man z. B. die Geraden eh und fg, so müssen diese, weil sie in einer Ebene liegen, entweder

1) parallel sein oder

2) sich schneiden.

Ad 1) Ist eh || fg und zieht man bd, so muß bekanntlich auch bd || ch || fg sein. Dann ist aber

$\overline{ae} : \overline{eb} = \overline{ah} : \overline{hd}$ und

$\overline{bf} : \overline{fc} = \overline{dg} : \overline{gc}$, also auch, wenn man diese Proportionen verbindet und dann das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der mittleren setzt:

$$\overline{ae} \times \overline{bf} \times \overline{cg} \times \overline{dh} = \overline{eb} \times \overline{fc} \times \overline{gd} \times \overline{ha}.$$

Ad 2) Wenn die Geraden eh und fg sich schneiden, so muß dies in einem Punkte k der Geraden bd geschehen, nach welcher sich die Ebenen abd und bcd schneiden. Da aber die Gerade eh eine Transversale des Dreiecks abd, die Gerade fg eine des Dreiecks bcd ist, so haben wir nach der vorigen Nummer:

$\overline{ae} \times \overline{bk} \times \overline{dh} = \overline{eb} \times \overline{kd} \times \overline{ha}$ und

$\overline{bf} \times \overline{cg} \times \overline{kd} = \overline{fc} \times \overline{gd} \times \overline{bk}$, also, wenn man diese beiden Gleichungen verbindet und auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit $\overline{bk} \times \overline{kd}$ dividirt:

$$\overline{ae} \times \overline{bf} \times \overline{cg} \times \overline{dh} = \overline{eb} \times \overline{fc} \times \overline{gd} \times \overline{ha}, \text{ oder}$$

$$\frac{ae}{eb} \cdot \frac{cg}{gd} = \frac{fc}{bf} \cdot \frac{ha}{dh} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; A.^{*)}$$

Sowohl im Falle 1) als 2) erhalten wir dasselbe Resultat auf demselben Wege, wenn auch welche von den Punkten e, f, g, h nicht zwischen den Ecken einer Vierecksseite liegen.

Ist umgekehrt die Gleichung A wahr, so bleibt sie es, wenn man statt eines der vier Punkte (e, f, g, h) z. B. statt des Punktes h einen anderen auf der Geraden ad liegenden Punkt annimmt (der dann natürlich nicht in der E (efg) liegen kann), für welchen das Verhältniß $\overline{ha} : \overline{dh}$ dasselbe ist wie für den Punkt h. Einen solchen, und nur einen, Punkt giebt es aber, und liegt derselbe dem P (a) näher als dem P (d), wenn dieselbe Bedingung von dem P (h) erfüllt wird, wogegen er in unendlicher Ferne sich befindet, wenn h die Mitte der Geraden $\overline{ad}$ ist. Immer aber liegt von den beiden Punkten, die dasselbe Verhältniß $\overline{ha} : \overline{dh}$ geben, einer zwischen a und d, der andere nicht.

Damit also die Punkte e, f, g, h in einer Ebene liegen, ist es nothwendig, daß sie der Gleichung A Genüge leisten, aber diese Bedingung reicht nicht hin. Untersuchen wir daher, welche

---

*) Des bequemeren Setzens wegen haben wir hier die Horizontalstriche über den Buchstaben weggelassen.

Bedingung von den vier Punkten, wenn sie in einer Ebene liegen, noch erfüllt wird.

Es sei (in Fig. 83. a.) die T_1 senkrecht zur E (A_1) angenommen, in welcher die vier Schnittpunkte der Transversalen liegen, und seien m_1, n_1, o_1, p_1 die R_1 der vier Ecken des unebenen Vierecks, so liegen hier zwei Schnittpunkte (q, r) zwischen den beiden Ecken ihrer Seiten; lägen die vier Ecken auf einer Seite, so gäbe es keinen Schnittpunkt, der zwischen zwei Eckpunkten sich befände; lägen endlich ein paar Ecken rechts, das andere links der E (A_1), so gäbe es, je nach der Verbindung der Ecken, zwei oder vier Schnittpunkte, die zwischen den Ecken der Seiten liegen, denen sie angehören.

Wenn also die vier Punkte auf den Seiten des Vierecks in einer Ebene liegen, so darf keine ungerade Anzahl dieser Punkte zwischen den Ecken ihrer Seiten liegen. Aus dem allen geht nun der Satz hervor:

Damit vier Punkte, welche man auf den vier Seiten eines unebenen Vierecks angenommen hat, in einer Ebene liegen, ist es nothwendig, aber auch genügend, daß der oben angeführten Gleichung A genügt werde, und daß keine ungerade Anzahl der vier Punkte zwischen zwei Ecken liegen.

Fig. 84. 10. Sind A, B und C die SchL einer geradlinigen WF*), D, E und F drei Ez derselben, die also die SchL in den Punkten a, x, b; v, o, z; d, y, c schneidet, und wir wollen nun D, E und F als SchL einer WF (D, E, F), daher A, B und C als Ez dieser WF ansehen, so läßt sich mit Hilfe des Satzes in der vorigen Nr. nachweisen, daß eine beliebige Ez (G) der WF (A, B, C) eine beliebige Ez (H) der WF (D, E, F) (in endlicher oder unendlicher Entfernung) schneidet.

Denn da die G (G) die Geraden A, B, C (in v′, o′, z′) schneidet, so liegen die vier Punkte x, y, v′ und z′ in einer Ebene;

*) Da bekanntlich diese SchL nicht in einer Ebene liegen, so können wir sie nicht in ihrer wirklichen gegenseitigen Lage zeichnen, und unsere Fig. hat daher eine andere Gestalt, als das, was sie vorstellen soll; dasselbe gilt für die Fig. 83.

eben so liegen die Punkte x, y, v, z und x′, y′, v, z in einer Ebene. Es ist daher*) für unser unebenes Viereck abcd

$$\frac{ax}{xb} \cdot \frac{cy}{yd} = \frac{zc}{bz} \cdot \frac{va}{dv},$$

$$\frac{ax'}{x'b} \cdot \frac{cy'}{y'd} = \frac{zc}{bz} \cdot \frac{va}{dv} \text{ und}$$

$$\frac{ax}{xb} \cdot \frac{cy}{yd} = \frac{z'c}{bz'} \cdot \frac{va'}{dv'}, \text{ folglich auch}$$

$$\frac{ax'}{x'b} \cdot \frac{cy'}{y'd} = \frac{z'c}{bz'} \cdot \frac{v'a}{dv'}.$$

Da aber aus der Figur leicht ersichtlich ist, daß die beiden Punkte x′, y′ zugleich ja oder nicht zwischen den Ecken ihrer Seiten liegen und ein ähnliches von dem Punktenpaar v′, z′ gesagt werden kann, so sieht man, daß die vier Punkte x′, y′, v′, z′ in einer Ebene liegen, und daher die Geraden G und H sich in der Regel schneiden. Ob sie auch parallel sein können, werden wir weiter unten untersuchen; so viel ist aber gewiß, daß die G (H) höchstens mit einer Ez der WF (A, B, C) parallel sein kann. Denn wäre sie es mit zweien, so müßten diese selbst parallel sein, also in einer Ebene liegen, was aber deshalb unmöglich ist, weil sonst die Geraden A, B und C selbst in einer Ebene lägen, also statt der WF eine Ebene entstände.

Bewegen wir also die G (G) als Ez der WF fort, so wird der Punkt, in welchem sie die Ez (H) der WF (D, E, F) schneidet, auf der G (H) fortgehen, und uns so überzeugen, daß durch jeden Punkt der G (H) eine Ez der WF (A, B, C) gelegt werden kann, daß also jeder Punkt der G (H) zugleich ein Punkt der WF (A, B, C) ist, daß demnach alle Punkte der WF (D, E, F) zugleich Punkte der WF (A, B, C) sind, d. h. daß diese beiden WF zusammenfallen. Wir haben daher die Sätze:

1) Wenn man drei Ez (D, E, F) einer WF (A, B, C), wo A, B und C gerade Linien sind, als Schneidlinien einer WF (D, E, F) ansieht, so fällt diese WF mit der gegebenen zusammen.

*) Da alle Geraden dieser und der folgenden Nr., welche mit zwei Buchstaben bezeichnet sind, von den mit diesen Buchstaben bezeichneten Punkten begrenzt vorausgesetzt werden, so haben wir zur Erleichterung für den Setzer die Horizontalstriche über den zwei Buchstaben weggelassen.

2) Durch jeden Punkt einer WF (A, B, C) mit geraden SchL kann man zwei Gerade legen, eine Ez der WF (A, B, C) und eine Ez der WF (D, E, F); diese letztere Gerade wollen wir eine SchL der WF (A, B, C) nennen.

Fig. 85. 11. Es seien die Geraden A und B die SchL einer WF(A, B, E) (wo E die Ebene (Leitebene) bezeichnet, mit der die Ez dieser Fläche parallel sein sollen) und C, D zwei Ez dieser Fläche, welche also die Geraden A und B (in den Punkten a, b, c, d) schneiden. Nimmt man nun eine Ebene E′ an, die zu den Geraden A und B parallel ist, und betrachtet sie als Leitebene einer WF (C, D, E′), so kann man sich in ähnlicher Weise, wie in der vorigen Nummer, überzeugen, daß eine beliebige Ez (E) der WF (A, B, E) eine beliebige Ez (F) der WF (C, D, E′) schneidet. Denn bezeichnet man mit x und y, v und z die Punkte, in denen die Ez E, F die ihnen entsprechenden Schneidlinien schneiden, so ist (nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie) weil die drei Geraden C, D und E parallel einer Ebene (E) sind:

$$av : vd = bz : zc$$ und, aus ähnlichen Gründen

$$dy : yc = ax : xb$$, folglich

$$av \times dy \times cz \times bx = vd \times yc \times zb \times xa \ .$$

Da hier wieder die beiden Punkte x und y zugleich ja oder nicht zwischen den Endpunkten der Seite liegen, der sie angehören, so folgt, daß die Geraden E, F sich in der Regel schneiden. Hieraus läßt sich in ähnlicher Weise wie in der vorigen Nummer schließen, daß die WF (A, B, E) zusammenfällt mit der WF (C, D, E′).

Man kann also auch hier durch jeden Punkt der WF (A, B, E) außer der Ez noch eine dieser Fläche angehörige Gerade zeichnen, welche wir wieder eine SchL dieser Fläche nennen wollen. Da aber alle diese SchL zugleich Ez der WF (C, D, E′) sind, so sieht man, daß alle geraden SchL einer WF mit Leitebene parallel zu einer Ebene (E′) sind, die wir die zweite Leitebene der WF nennen können.

12. Wir haben oben gesehen, daß durch jeden Punkt einer WF (A, B, C) mit geraden SchL außer der Ez noch eine Gerade eine (SchL) gelegt werden kann, und daß jede gerade SchL mit jeder Ez in einer Ebene liegen. Wollen wir nun sehen, ob auch eine Ez und eine SchL parallel sein können. Um dies zu

erfahren, suchen wir eine Ez, welche mit einer SchL, z. B. mit A, parallel ist und die anderen (B und C) schneidet. Thut man dies, so findet man (* 57.), daß es in der Regel eine solche Gerade giebt, nur dann nicht, wenn die Geraden A, B und C parallel zu einer Ebene sind. Sind also die Geraden A, B und C nicht parallel zu einer Ebene, d. h. hat die Fläche keine Leitebene, so giebt es zu jeder Ez eine parallele SchL und umgekehrt. Legen wir daher durch einen Punkt zu allen Ez Parallele, wodurch wir einen Kegel (den sogenannten Leitkegel) erhalten, und thun dasselbe für alle Schneidlinien, so fallen die beiden Kegel in einen zusammen.

13. Hat die WF mit geraden SchL eine Leitebene, so sind die SchL dieser Fläche, wie wir oben gesehen haben, parallel einer Ebene (E′) und dann giebt es keine Gerade, die zwei SchL trifft und mit einer dritten parallel ist, woraus sich vermuthen läßt, daß, wenn man durch einen Punkt zu allen Ez Parallele legt, wodurch man eine Ebene (E) erhält, und zu allen SchL, die auf eine Ebene (E′) führen, diese beiden Ebenen E und E′ nicht zusammenfallen. In der That können sie es nicht; denn fielen sie zusammen, so müßten in Fig. 85. die Geraden A, B, C und D parallel zu einer Ebene sein, und da sie sich wechselweise schneiden, in eine Ebene fallen; wir erhielten dann eine Ebene statt einer WF.

Da nun E und E′ nicht zusammenfallen, also auch nicht parallel sein können, so schneiden sie sich nach einer Geraden K. Während man zu jeder Geraden der E eine parallele Ez und zu jeder der E′ eine parallele SchL finden wird, so macht darin K nothwendig eine Ausnahme. Denn wäre das nicht der Fall, so müßte es zu K, da es in beiden Ebenen liegt, eine parallele Ez und eine parallele SchL geben; es müßten daher diese Ez und SchL parallel sein, während, wie wir oben gezeigt haben, bei einer WF mit Leitebene zu keiner Ez eine parallele SchL möglich ist.

Anm. Dennoch dürfen wir sagen: es giebt zu jeder Ez (einer WF mit Leitebene) eine parallele SchL, aber diese liegt ganz und gar in unendlicher Ferne; eben so giebt es zu K eine parallele Ez und SchL, aber in unendlicher Ferne.

Fig. 86. 14. Wir wollen noch einige Bemerkungen in Bezug auf eine KF (Aa) machen, die eine Kreislinie (A) zur Schneidlinie hat, ohne daß sie eine DF ist. Nimmt man die T_1 so an, daß sie die kreisförmige SchL enthält, und die T_2 so, daß sie durch das Centrum (a) der KF geht und zugleich das Centrum (b) der Kreislinie A enthält, wie dies in unserer Figur geschehen ist, so ist die in der T_2 liegende Gerade B, deren R_2 (B_2) den Winkel der beiden den UR_2 der KF bildenden Geraden halbirt, die also nicht durch b_2 geht, die Achse dieser KF zweiter Ordnung. Alle auf dieser Achse senkrechten Ebenen schneiden die KF nach Ellipsen, welche gleiche Achsenverhältnisse haben; diese KF gehört daher zu den OF und die T_2 ist eine Hauptebene derselben. Nimmt man nun eine E (C_2) so an, daß die Punkte e, f, in denen sie das Pr_2 der KF schneiden, beziehungsweise von a so weit entfernt sind, als die Punkte c, d, in denen dieses Pr_2 von der T_1 getroffen wird, so liegen die beiden Ebenen (A_2 und C_2) symmetrisch gegen die Achse (B) und schneiden daher unsere KF nach congruenten Curven. Es ist demnach der Schnitt der E (C_2) mit der KF (Aa) auch eine Kreislinie. Man nennt nun diese beiden Ebenen antiparallel, oder die eine E (A_2) die antiparallele der anderen E (C_2). Jede Ebene, die zur einen dieser beiden Ebenen parallel ist, schneidet die KF nach einer Kreislinie.

Dieselben Betrachtungen lassen sich machen für den Fall, daß eine Linie zweiter Ordnung (A) als Schneidlinie einer Fläche erscheint, die durch Bewegung einer Kreislinie entsteht, deren Mittelpunkt einen Durchmesser von A beschreibt und deren Ebene ihrer ursprünglichen Lage parallel und $\perp$ E (A) bleibt.

15. Zum Schlusse dieses Anhanges und mit ihm des ganzen Lehrbuches mag noch eine Bemerkung über die Entwickelung von Flächen hier Platz finden, die an der Stelle des Buches, wo sie eigentlich hingehörte, vergessen wurde.

Wenn es nemlich auch wahr ist, daß sich, genau genommen, nur solche Flächen entwickeln lassen, die ebene Elemente haben, so läßt sich praktisch auch mit nicht entwickelbaren Flächen das Entwickeln annäherungsweise vornehmen, und zwar in der Weise, daß man die Fläche durch Ez in Theile theilt, die man annäherungsweise als EF ansieht. Ein Beispiel mag hier darüber angeführt

werden. Theilt man eine DF durch Meridiane in Flächenstreifen, so kann man jeden solchen Streifen als CF ansehen (und ihn daher wie eine CF entwickeln), wenn man die Bögen, die der Streifen mit den Parallelkreisen gemein hat, als Gerade betrachtet, die auf dem Meridian, der den Streifen symmetrisch theilt, senkrecht stehen. Schneidet man nun die so verwandelten Streifen aus Papier oder Blech aus, so werden sie sich doch auf die DF auflegen lassen, wenn man die geringen Fehler, die man durch eine falsche Voraussetzung begangen, dadurch wieder gut macht, daß man die Dehnbarkeit des Materials benützt, um es in die Form zu zwingen, die es nicht gern annimmt. Auf diese Art kann in der Anwendung die Entwickelung einer nicht entwickelbaren Fläche eben so gut gefordert und ausgeführt werden, als die einer CF.

Berichtigungen.

Man bittet, vor dem Gebrauche dieses Werkes folgende Berichtigungen vorzunehmen:

Seite 2	Zeile 16	v. o.	statt:	E, also, lies: E zusammenfällt, also.
„ 11	„ 11	v. u.	„	(12.) und, l. (12.) der E, und.
„ 14	„ 7	v. o.	„	P(A) l. P(a).
„ 18	„ 4	v. o.	„	Evolvente, l. Evolute.
„ 23	„ 14	v. o.	„	durch . . . . . so ist l. durch d eine Senkrechte zu A und durch g eine zu ad, so ist.
„ 24	„ 8 u. 9	v. o.	„	gh l. fh.
„ 29	„ 11	v. u.	„	$\overline{fh} = \overline{ih}$ l. $\overline{fk} = \overline{eh}$.
„ 30	„ 12	v. u.	„	$\overline{c_3e_3}$ l. $\overline{c_3e_1}$.
„ 32	„ 4	v. u.	„	Brennpunkte l. Scheitel.
„ 37	„ 3	v. o.	„	$\overline{de}$ l. $\overline{ce}$.
„ 42	„ 1	v. u.	„	A_1 l. $\mathfrak{A}_1$.
„ 70	„ 15	v. o.	„	eine l. einer.
„ 71	„ 2	v. o.	„	geschnitten l. schneidet.
„ 75	„ 11 u. 12	v. o.	„	noch eine l. nach einer.
„ 80	„ 14	v. o.	„	verfahren l. verfahren würden.
„ 80	„ 15	v. u.	„	der $\mathfrak{K}_1(A_1)$ den l. den $\mathfrak{K}_1(A_1)$ der.
„ 88	„ 5	v. u.	„	liegen. l. liegen, besonderes Interesse.
„ 94	„ 11	v. o.	„	G(de) l. $G(d_1e_1)$.
„ 95	„ 2	v. u.	„	durch c l. durch b.
„ 96	gehört zur Nr. 169. die Fig. 48.			
„ 116	„ „ „ 201. „ „ 60.			
„ 118	Zeile 3	v. o.	statt:	d_2c_2 l. e_2c_2.
„ 126	„ 16	v. o.	„	EE l. LE.
„ 134	„ 16	v. o.	„	zur T_1 Parallele l. Parallele.
„ 141	„ 3	v. u.	„	a l. b.

NB. Zur Ehre der Officin, in der dieses Buch gedruckt wurde, sei hier bemerkt, daß ihr die in diesem Buche vorkommenden Druckfehler nicht zur Last fallen, sondern daß die Schuld an diesen lediglich auf den Verfasser fällt, der während des Druckes dieses Werkes zu sehr von Arbeiten in Anspruch genommen war, als daß er die nöthige Ruhe gehabt hätte, die Correkturen gründlich genug durchzugehen.

Der Verfasser.

an dem ungestörten Fortgang des Werkes zweifelten, die Möglichkeit zu geben, sich, da allmonatlich eine Section zur Versendung kommt, innerhalb eines Zeitraumes von vier Jahren in den Besitz desselben zu setzen. Näheres noch sagt unser Prospekt vom Juli 1852.

Friedreich, J. B. Zur Bibel. Naturhistorische, anthropologische und medicinische Fragmente. 2 Theile. 1848. broch. 3 Rth. 15 Ngr. od. 5 fl. 30 kr.

Harleß, Emil., Dr. Physiologische Beobachtung und Experiment. Eine methodologische Skizze. 1848. broch. 10 Ngr. od. 30 kr.


Hesselbach, A. K., Dr. Die Erkenntniß und Behandlung der Eingeweidebrüche durch naturgetreue Abbildungen erläutert. Mit 20 Tafeln Abbildungen in natürlicher Größe. 1840. gr. Folio. geb. 16 Rth. od. 28 fl.

Küster, H. C., Dr. Die Käfer Europa's nach der Natur beschrieben. Mit Beiträgen mehrerer Entomologen. In Heften, deren jedes in Futteral auf 100 Blatt gut geleimten Papiers die genaue Beschreibung ebensovieler Käfer nebst Register und 2 oder 3 Tafeln Abbildungen von Gattungsrepräsentanten enthält. Pr. Heft 1 Rth. od. 1 fl. 36 kr. Umfaßt bis jetzt 27 Hefte.

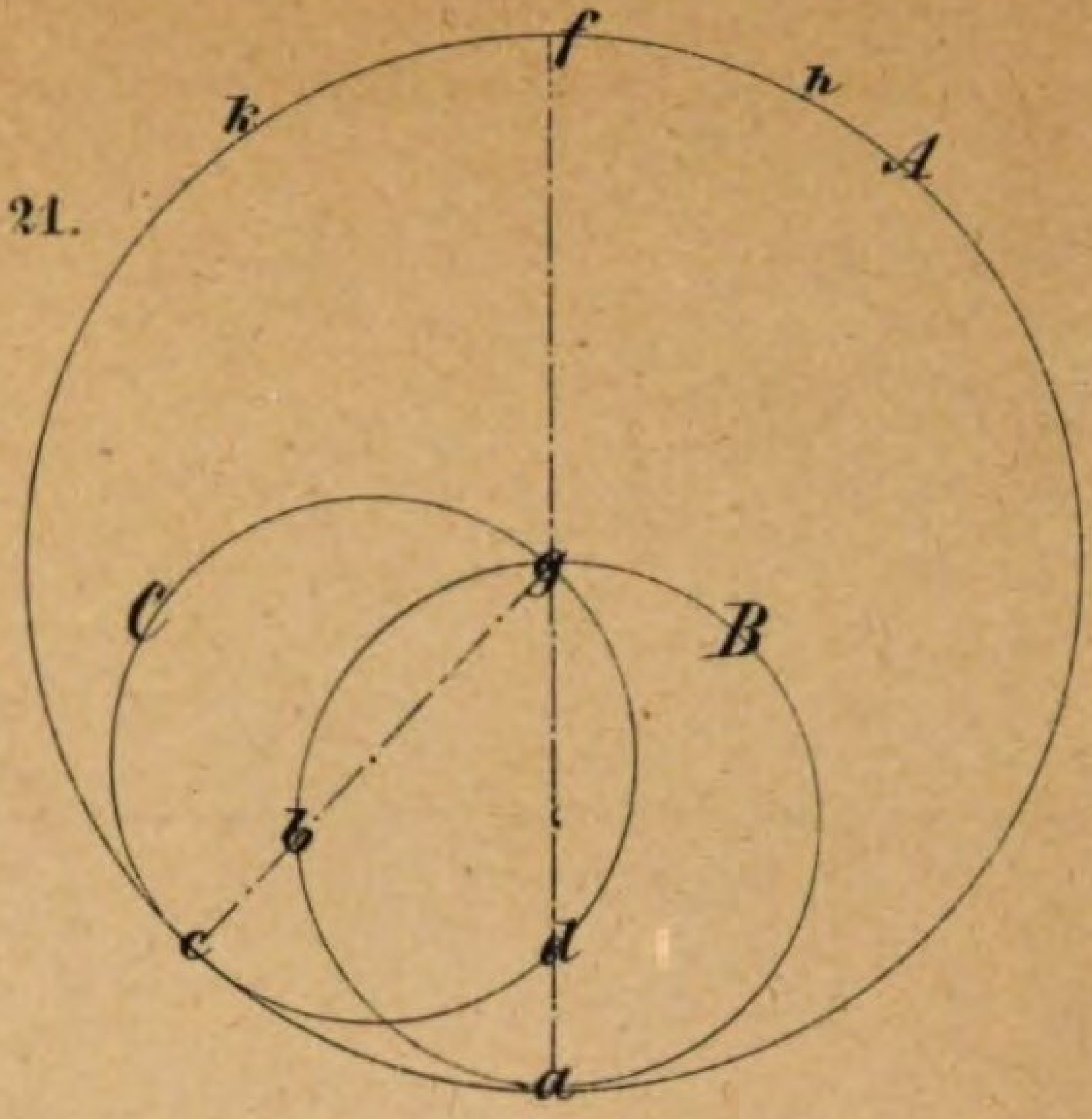
Reinsch, Hugo, Dr. Versuch einer neuen Erklärungsweise der electrischen Erscheinungen. 1841. Geh. 15 Ngr. od. 54 kr.

Wöckel, Lorenz, Dr., Prof. der Mathematik am Gymnasium und Lehrer der Physik an der Handels-Gewerbschule in Nürnberg. Die Lehre von der Wärme mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in den Gewerben, der Landwirthschaft und im Haushalte, überhaupt für alle Diejenigen, welche ohne weitere naturwissenschaftliche Kenntnisse sich in diesem wichtigen Theile der Physik gründlich und ausführlich unterrichten wollen. Mit einer Kupfertafel. br. 25 Ngr. od. 1 fl. 24 kr.

— — Populäre Sternkunde in der Form von Vorlesungen. Mit 4 Kupfertafeln. Zweite Ausgabe. br. 1 Rth. 20 Ngr. od. 2 fl. 42 kr.

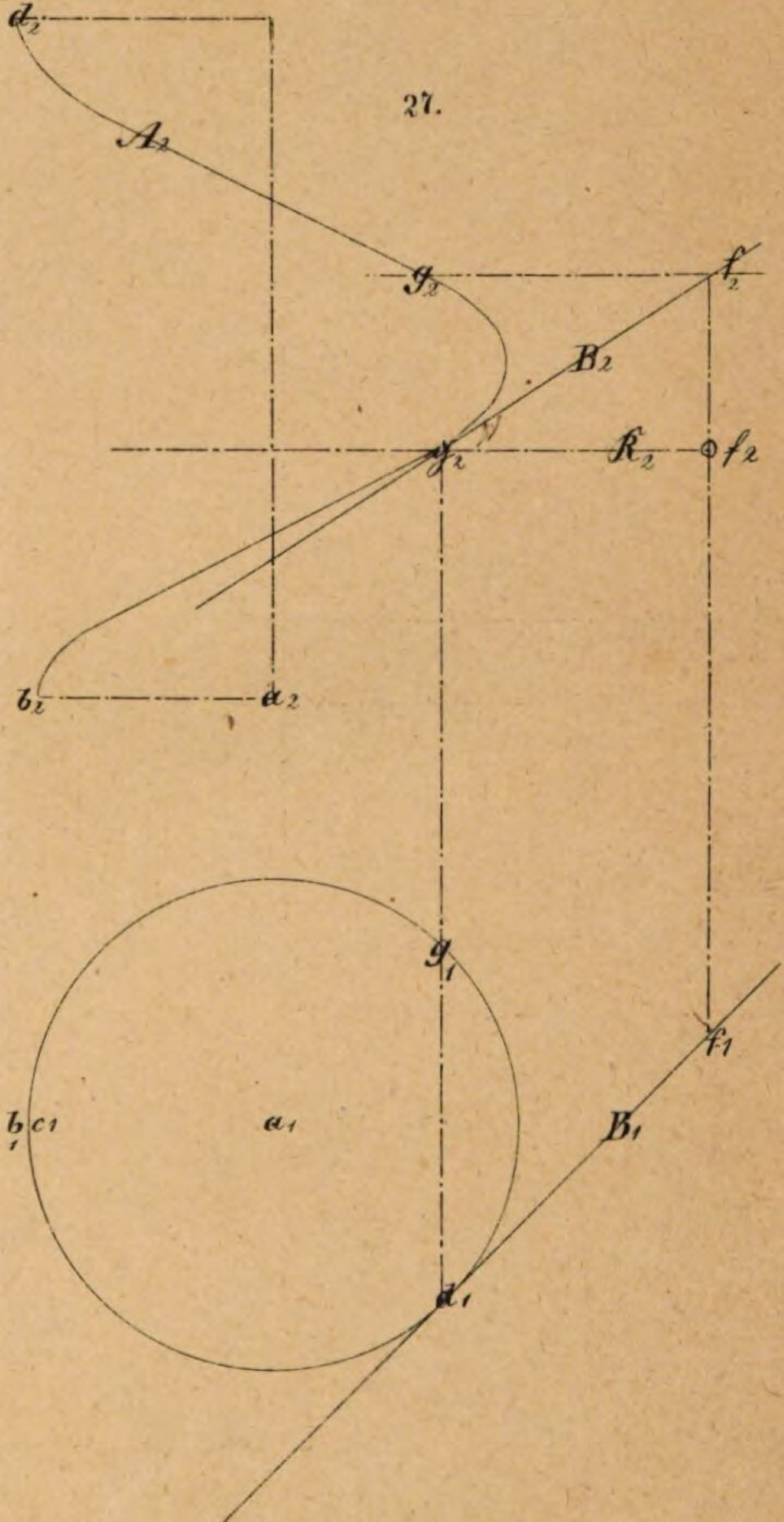

1.
6 a
6 b
6 c
6 d
6 e
12.
16.
17

21.

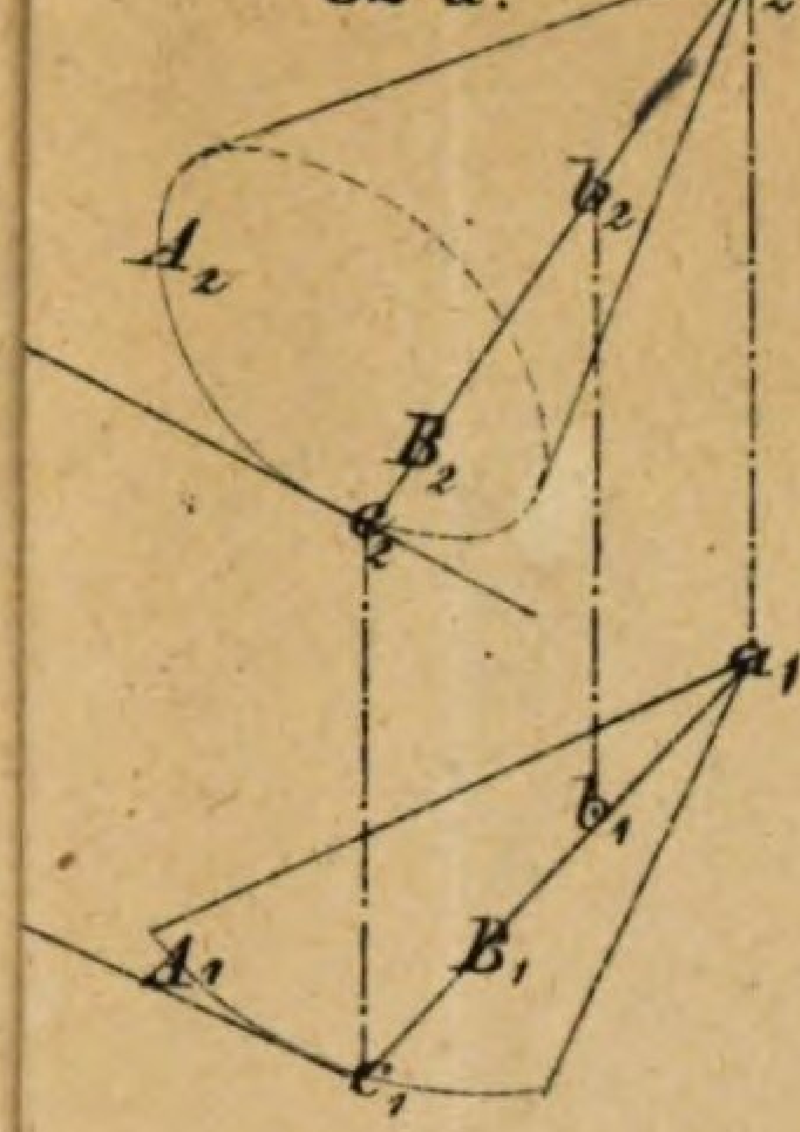

f
k
h
A
C
g
B
b
c
d
a


B
b
A
b
h
c
a

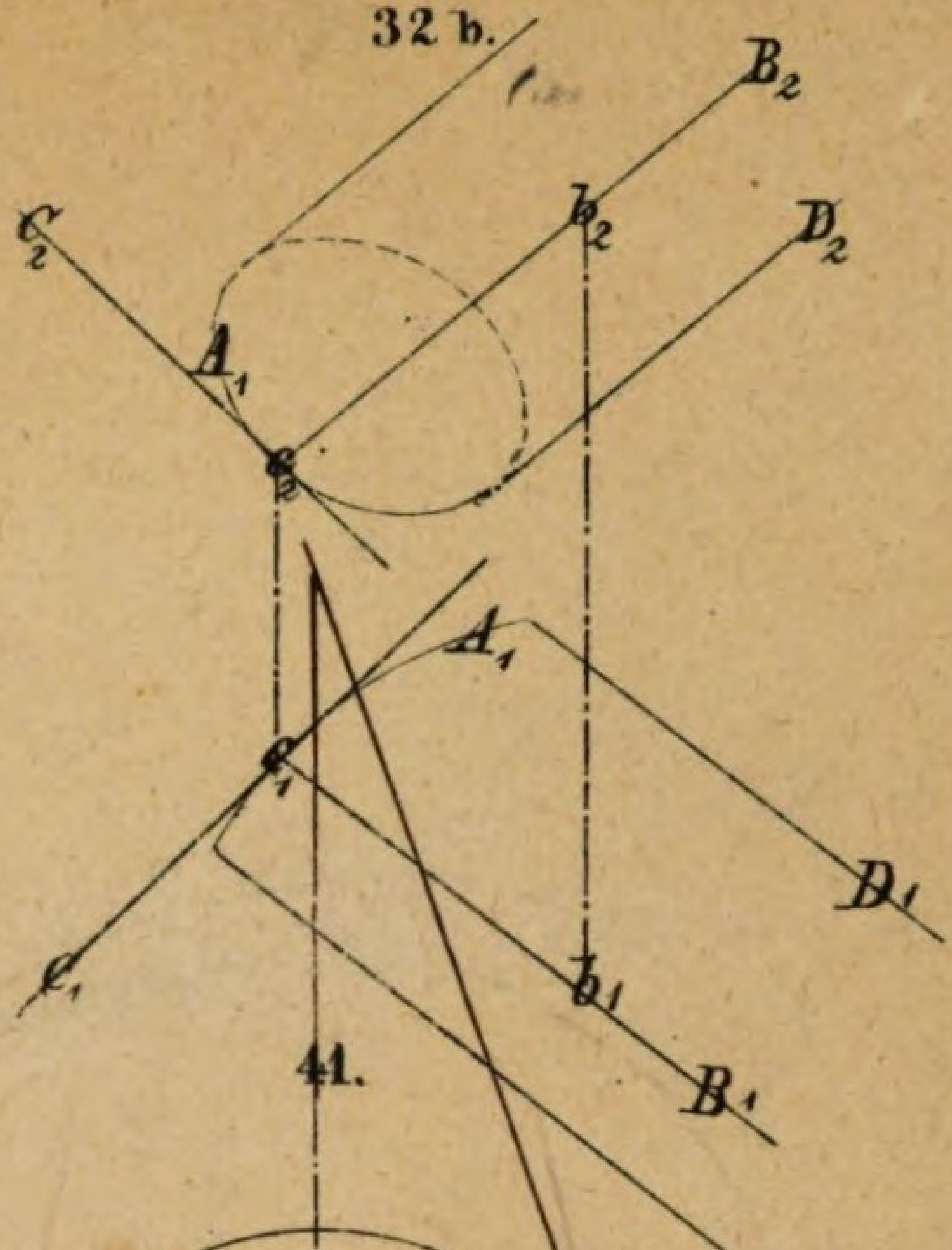
27.


d_2
A_2
g_2
f_2
B_2
K_2
f_2
b_2
a_2
g_1
f_1
b_1 c_1
a_1
B_1
d_1

32 a.


a2
A2
b2
B2
c2
a1
b1
B1
A1
c1

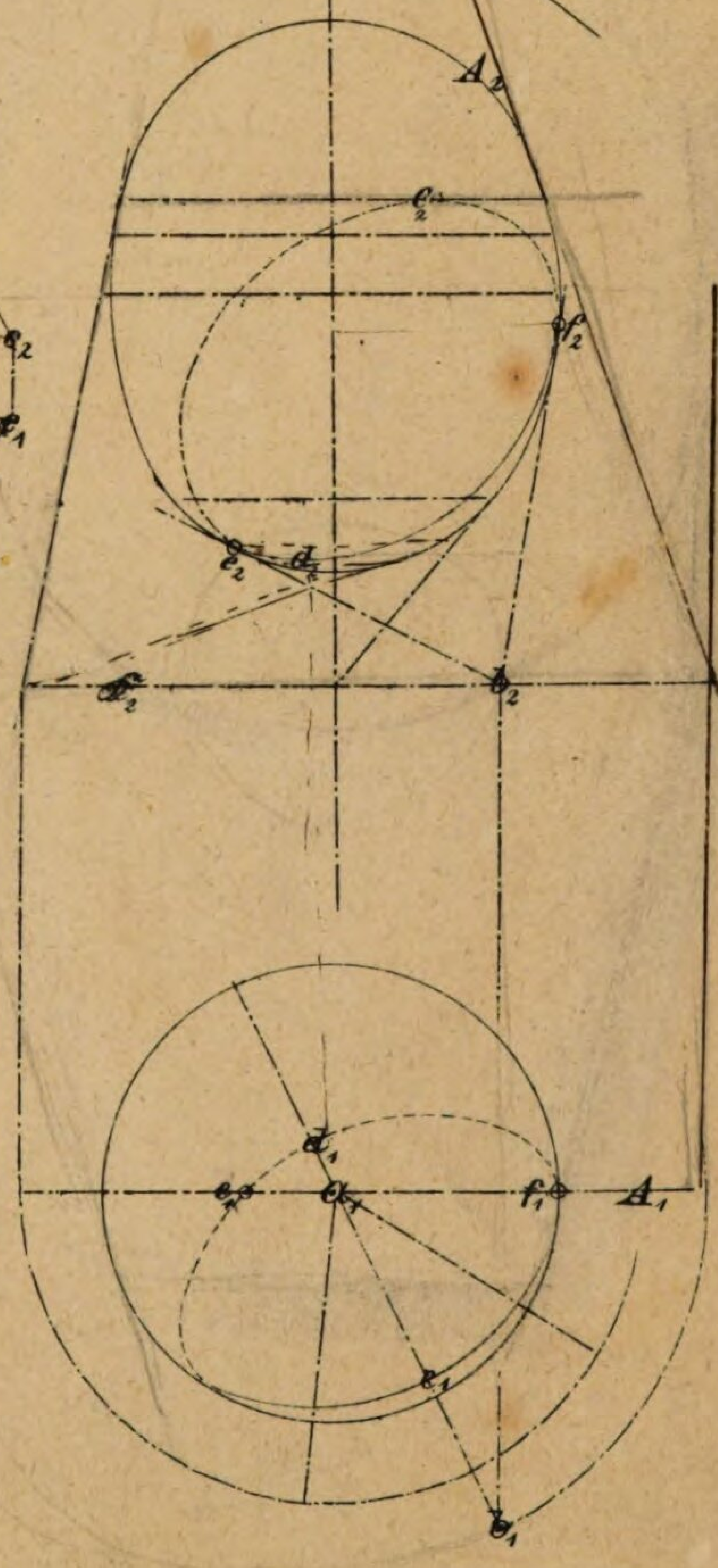
32 b.

B2
C2
b2
D2
A1
A1
C1
D1
b1
B1

b.

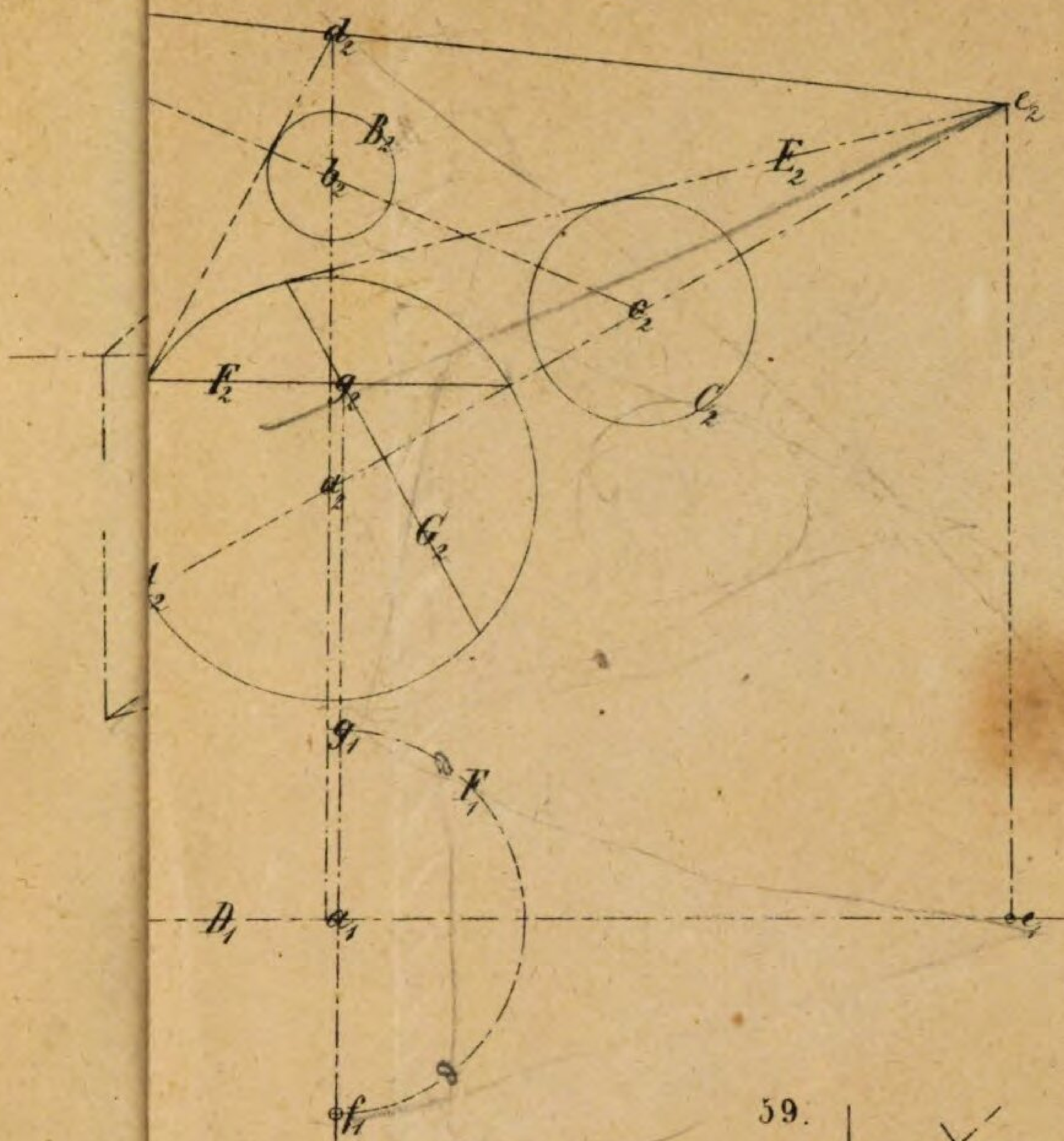

a2
b2
d2
B2
c2
b1
c1
a1
B1
d1
B2
B1
F1
D1
C1 C1
E1

41.

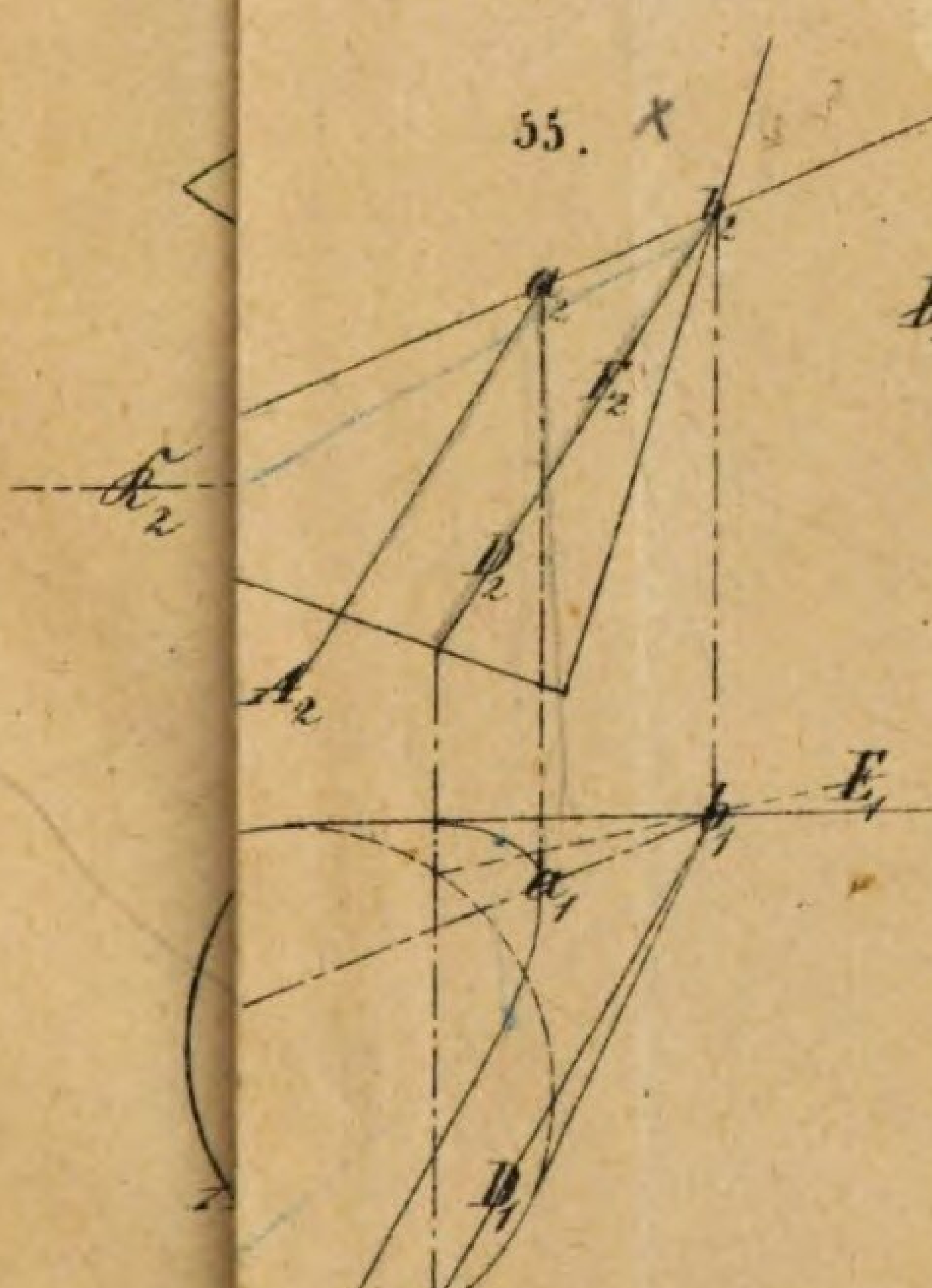

A2
c2
f2
e2
d2
a2
b2
d1
e
a1
f1
A1
c1
b1


44.
45.
50.

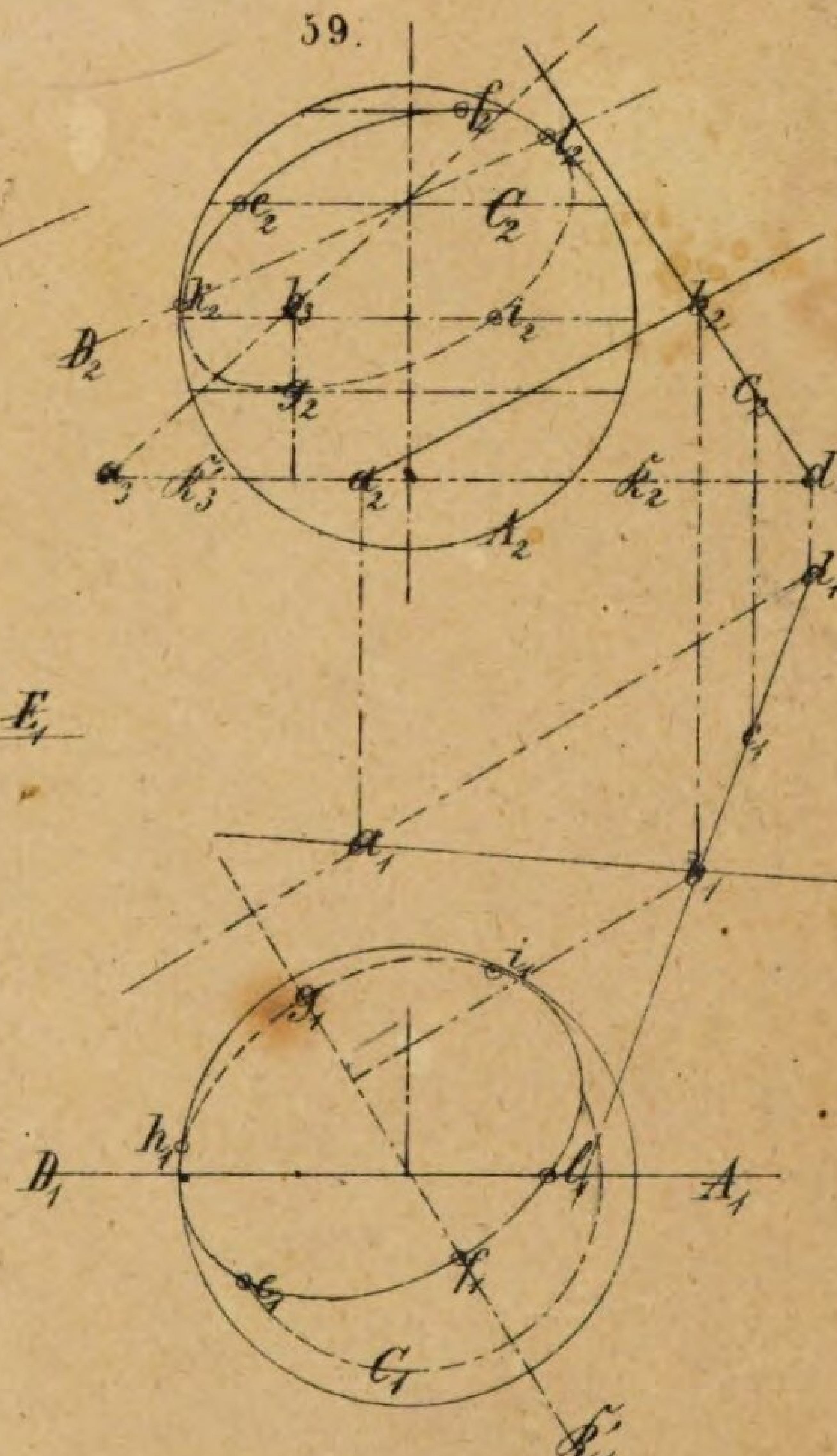
54.



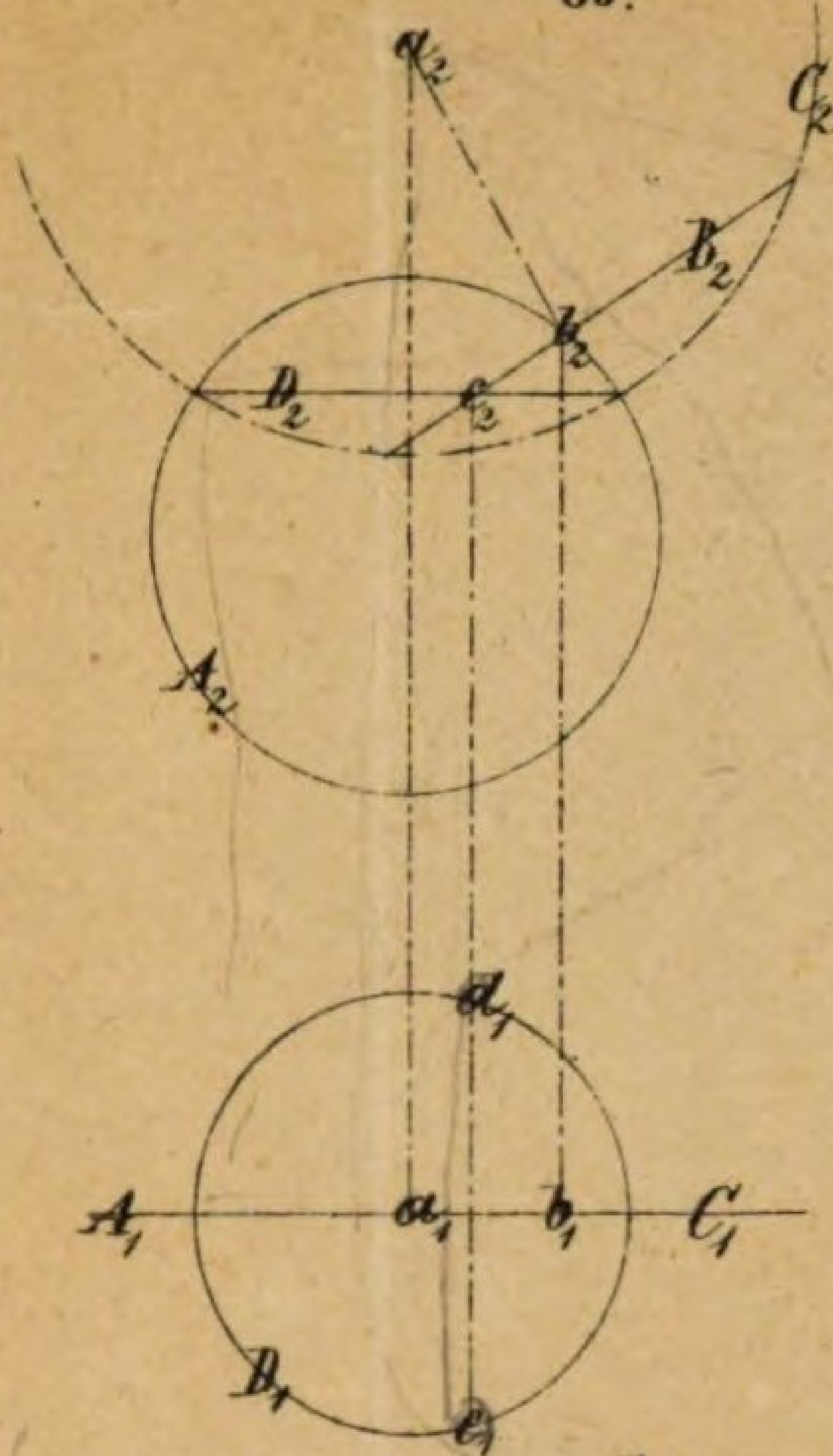
55.



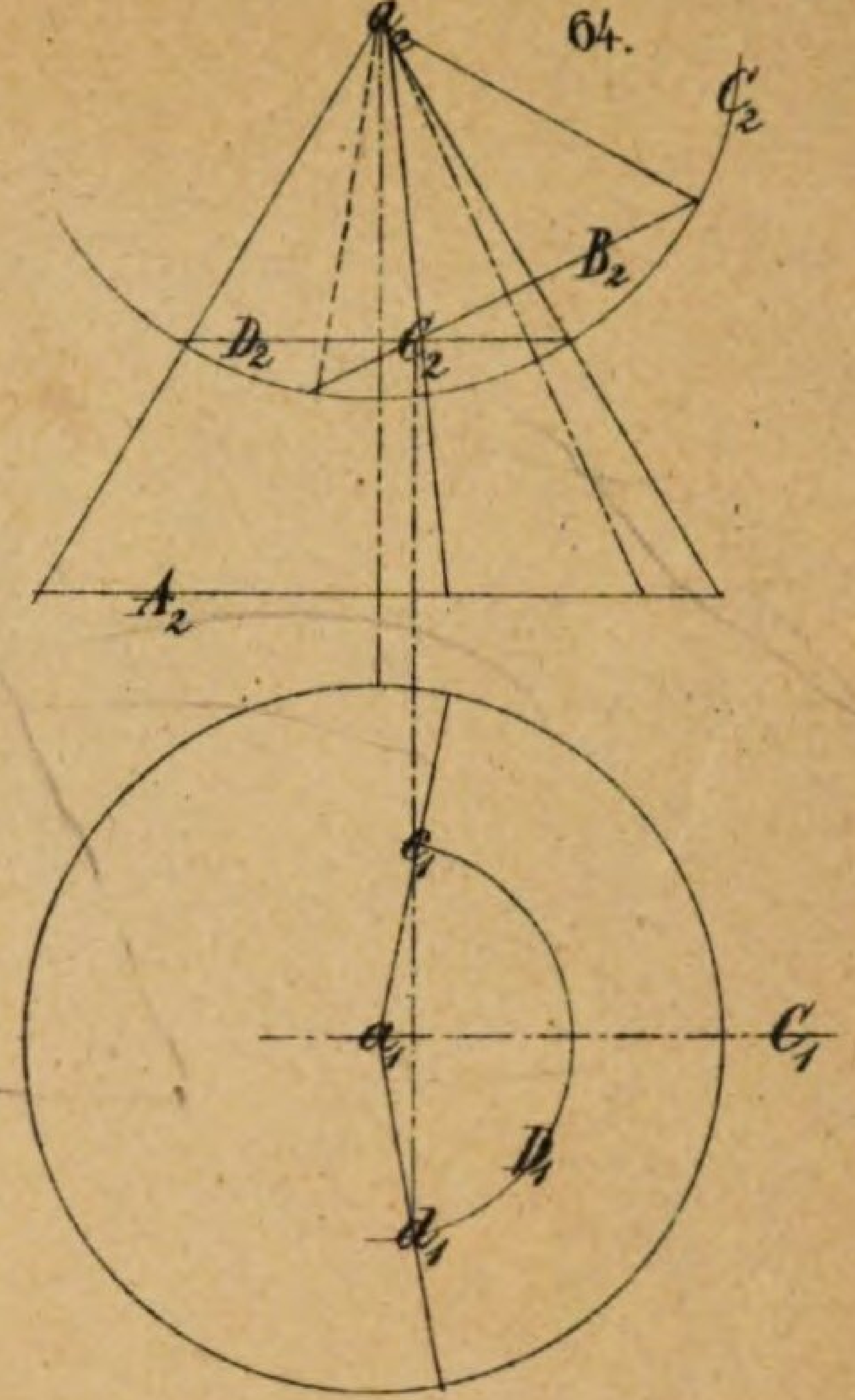
59.



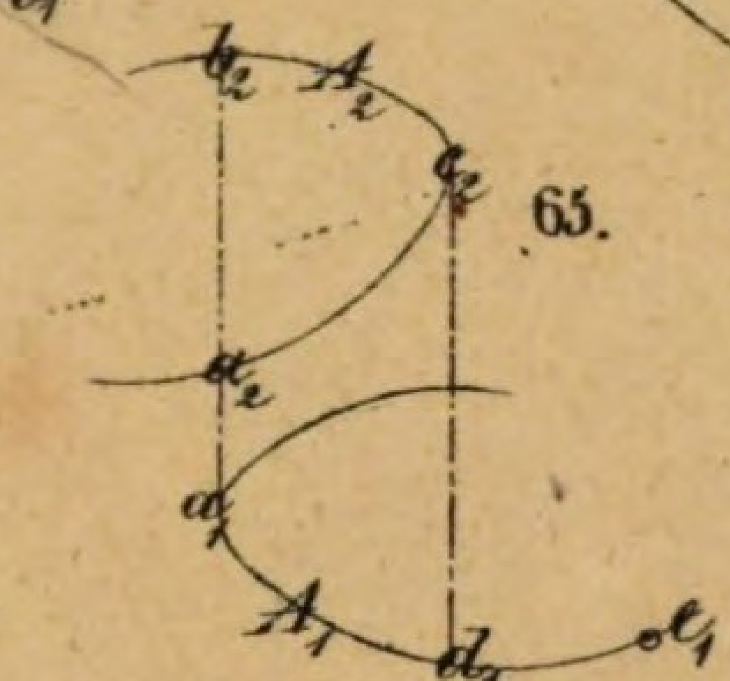
63.

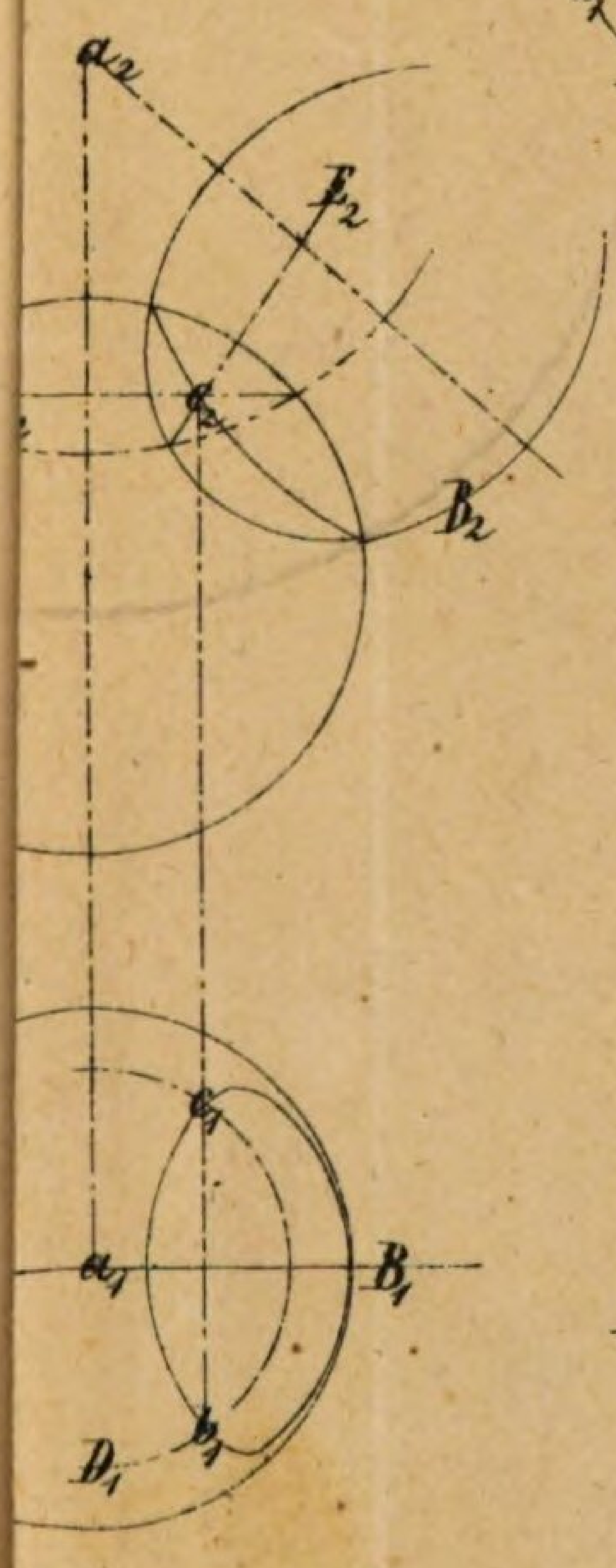

a2
C2
B2
b2
D2
c2
A2
d1
A1
a1
b1
C1
D1
c1

64.

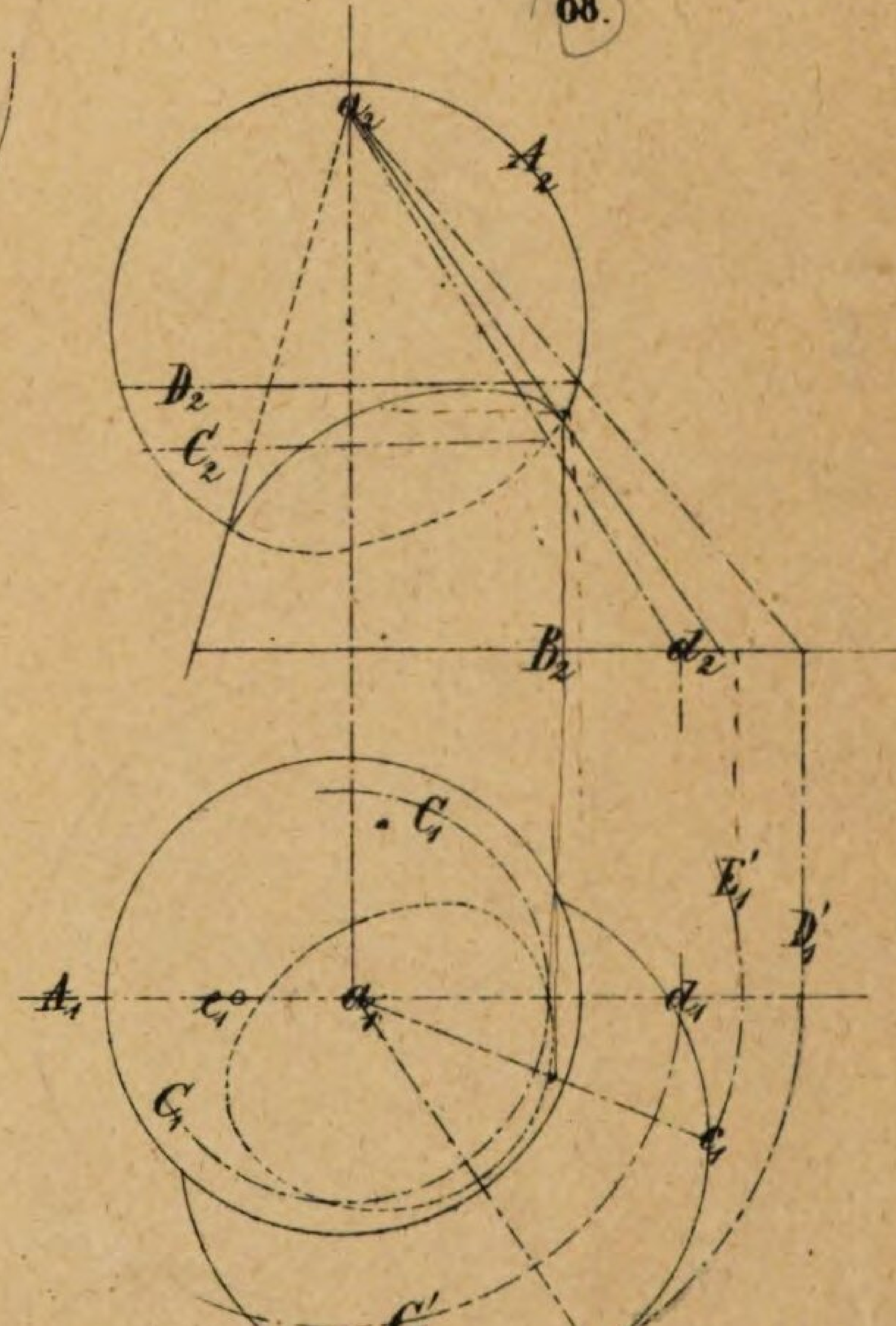

a2
C2
B2
D2
c2
A2
c1
a1
C1
D1
d1


65.


b2
A2
c2
a2
a1
A1
d1
e1


a2
E2
c2
B2
c1
a1
B1
D1
b1

68.


a2
A2
D2
C2
B2
d2
C1
E1'
D1'
A1
c1
a1
d1
C1
e1
C1'
b1
B1


74.
78.
80 b.
80 c.
82.
84.
85.
86.